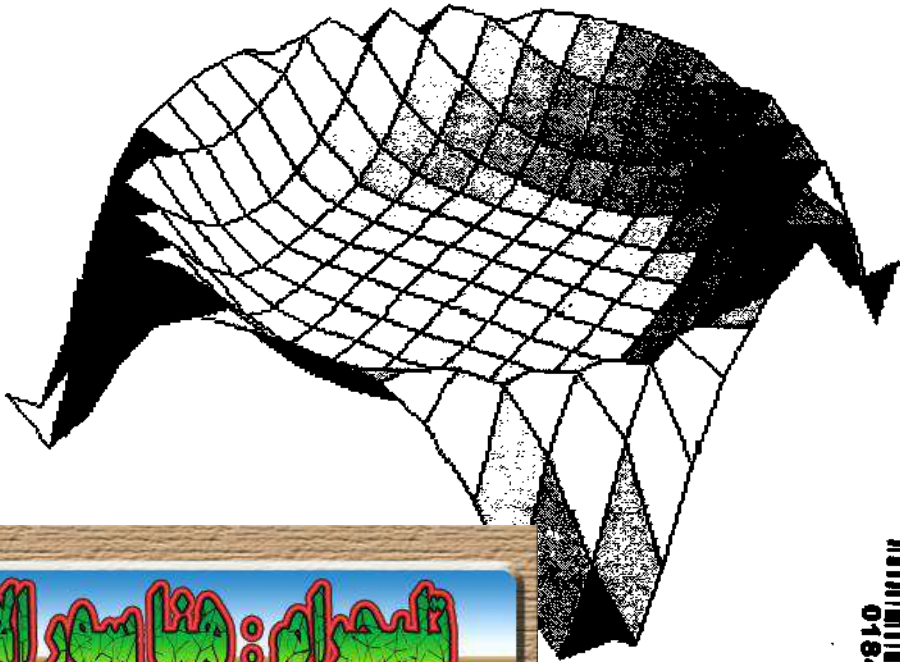


ماثيماتكا

الرياضيات باستخدام الكمبيوتر

دكتور

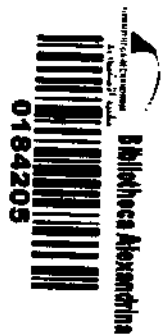
رأفت رياض رزق الله



تسجيل: د. ناسور الزبيدي



المكتبة الأكاديمية



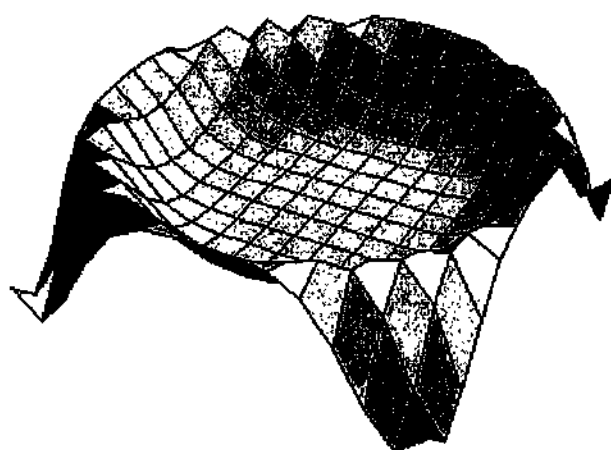
تليجرام : هنا سر الأزيكية
أكبر مكتبة رقمية

تليجرام مكتبة فوائض في بحر الكتب

ماثيماتيك
الرياضيات باستخدام الكمبيوتر

تليجرام أكبر مكتبة هنا سور الأزيكية
500000 كتاب

ماتيماتيكاً الرياضيات باستخدام الكمبيوتر



دكتور / رأفت رياض رزق الله

أستاذ مساعد بقسم الرياضيات

كلية التربية - جامعة عين شمس



الناشر

المكتبة الأكاديمية

تليجرام : هنا سور الانبياء
أكبر مكتبة رقمية

تليجرام : هنا سور الانميكية أكبر مكتبة رقمية

حقوق النشر

الطبعة الأولى : حقوق الطبع والنشر © ٢٠٠٠ جميع الحقوق محفوظة للناشر :

المكتبة الأكاديمية

١٢١ شارع التحرير - الدقي - القاهرة

تليفون : ٣٤٨٥٢٨٢ / ٣٤٩١٨٩٠

فاكس : ٣٤٩١٨٩٠ - ٢٠٢

لا يجوز استنساخ أى جزء من هذا الكتاب بأى طريقة كانت
إلا بعد الحصول على تصريح كتابى من الناشر .

برنامج ماتيماتيكا Mathematica من تصميم
Stephen Wolfram ويعتبر البرنامج علامة
مسجلة من إنتاج شركة Wolfram Research

تليجرام : مناسير الزكية
أكبر مكتبة رقمية

مُتَكَمِّمَات

برنامج ماثيماتيكاس هو نظام عام لعمل الحسابات العلمية ويستخدمه الآن العديد من الباحثين في مجال الرياضيات والهندسة في معظم أنحاء العالم وتطبيقات برنامج ماثيماتيكاس تدخل في العديد من العلوم كما يستخدم كلغة برمجة ولقد ظهر برنامج ماثيماتيكاس في عام 1988 وقام بتصميمه Stephen Wolfram الذي قام بتأسيس شركة Wolfram Research حيث تم تطوير برنامج ماثيماتيكاس وظهر له إصدارات على العديد من نظم الكمبيوتر مثل نظام التشغيل DOS ونظام النوافذ Windows وماكينتوش Mackintosh وكيفية التعامل مع الأوامر المختلفة مع التوضيح بالأمثلة المتعددة في فروع الرياضيات المختلفة وقد تم تقسيم الكتاب إلى سبعة أبواب كالآتي :

- الباب الأول : ما هو ماثيماتيكاس؟
- الباب الثاني : ماثيماتيكاس والحسابات العددية
- الباب الثالث : ماثيماتيكاس والجبر
- الباب الرابع : ماثيماتيكاس والتفاضل والتكامل
- الباب الخامس : ماثيماتيكاس ورسم الدوال
- الباب السادس : ماثيماتيكاس والتحليل العددي
- الباب السابع : البرمجة في ماثيماتيكاس

تعليم : مناسبات الأزياء
أكبر مكتبة رقمية

المحتويات

الصفحة

13

ما هو ماثيماتيكا؟

الباب الأول

- 17 ١ - تشغيل ماثيماتيكا من خلال برنامج النوافذ Windows
 22 ٢ - القلب والواجهة في ماثيماتيكا
 Kernel and Front End in Mathematica
 30 ٣ - الحصول على معلومات من ماثيماتيكا
 Getting Information from Mathematica
 38 ٤ - التعبيرات في ماثيماتيكا
 Mathematica and Expressions

41

ماثيماتيكا والدوال العددية

الباب الثاني

- 43 ١ - الحسابات العددية Numerical Calculation
 47 ٢ - الأنظمة العددية Number Systems
 51 ٣ - المتغيرات Variables
 57 ٤ - بعض الدوال الرياضية ... Some Mathematical Functions
 67 ٥ - الأعداد المركبة Complex Numbers

الصفحة

71

ماثيماتيك والجبر

الباب الثالث

73

١ - كثيرات الحدود والدوال الكسرية

Polynomials and Rational Functions

79

٢ - المتسلسلات Series

84

٣ - حل المعادلات Solving Equations

92

٤ - الجبر الخطي Linear Algebra

92

أولاً : القوائم Lists

103

ثانياً : المصفوفات Matrices

112

ثالثاً : حل الأنظمة الخطية Solving Linear Systems

116

رابعاً : القيم المميزة والمتجهات المميزة

Eigenvalues and Eigenvectors

119

ماثيماتيك والتفاضل والتكامل

الباب الرابع

121

١ - تعريف الدوال Defining Functions

129

٢ - النهايات Limits

134

٣ - التفاضل Differentiation

141

٤ - التكامل Integration

144

٥ - المعادلات التفاضلية Differential Equations

الصفحة

149

ماتيماتكا ورسم الدوال

الباب الخامس

152

..... Two-Dimensional Plotting - ١ رسم الدوال فى المستوى

176

..... Three-Dimensional Plotting - ٢ رسم الدوال فى الفراغ

193

..... Parametric Plots - ٣ رسم الدوال البارامترية

197

ماتيماتكا والتحليل العددي

الباب السادس

200

..... - ١ الحل العددي لمعادلات كثيرات الحدود

Numerical Solution of Polynomial Equation

202

..... Numerical Root Finding - ٢ إيجاد جذر تقريبي

208

..... Numerical Minimization - ٣ إيجاد القيم الصغرى

213

..... - ٤ الحساب العددي للمجموع وحواصل الضرب

Numerical Sum and Product

216

..... Numerical Integration - ٥ التكامل العددي

221

..... Least - Squares - ٦ التقريب بالمربعات الصغرى

الصفحة

229

البومجة في ماتيماتكا

الباب السابع

231

..... Procedure ١ - منظومة الإجراءات

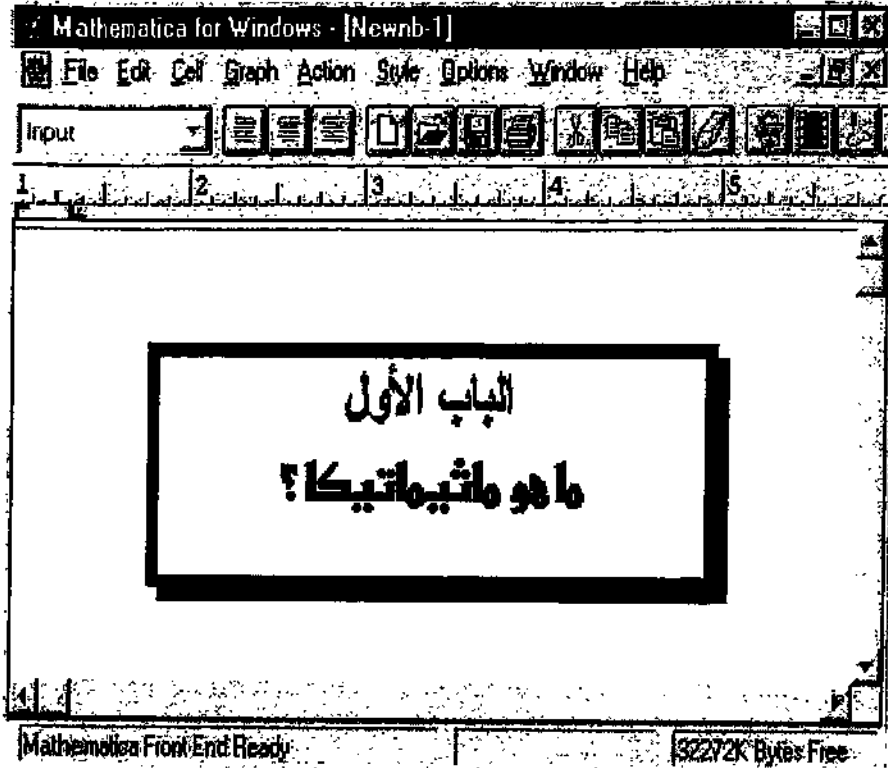
234

..... Loops ٢ - الحلقات التكرارية

240

..... Conditionals ٣ - أوامر الانتقال المشروط





في هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا
والخاصة بالموضوعات الآتية :

- ١ . تشغيل ماثيماتيكا من خلال برنامج النوافذ Windows
- ٢ . القلب والواجهة في ماثيماتيكا
- ٣ . الحصول على معلومات من ماثيماتيكا
- ٤ . التعبيرات في ماثيماتيكا

طليحرام : هنا سحر الانميكية
أكبر مكتبة رقمية

الباب الأول

ما هو ماثيماتكا ؟

What is Mathematica ?

برنامج ماثيماتكا هو نظام عام General System لعمل الحسابات والعمليات الرياضية المختلفة وهو برنامج مفيد ومتعدد الأغراض ويخدم قطاعا كبيرا من التخصصات العلمية المختلفة . وبرنامج ماثيماتكا يقوم بأجراء العمليات الحسابية العددية Numerical Calculations المتعارف عليها مثل الجمع والطرح والضرب والقسمة وحساب الأسس واللوغاريتمات والدوال المثلثية والزائدية سواء للأعداد الحقيقية Real Numbers أو الأعداد المركبة Complex Numbers وكذلك يقوم بأجراء العمليات الرياضية الرمزية Symbolic المتعارف عليها في فروع كثيرة من الرياضيات مثل الجبر والتفاضل والتكامل والجبر الخطي والمعادلات التفاضلية والدوال الخاصة والتحليل العددي والاحتمالات والإحصاء والبرمجة الخطية ، كما أن ماثيماتكا يقوم برسم الدوال سواء المباشرة أو البارامترية في بعدين أو ثلاثة أبعاد بالإضافة الى إمكانات متقدمة في الرسم البياني وإنتاج وثائق رياضية تتضمن النصوص والمعادلات والرموز الرياضية والرسومات معا وكذلك يمكن استخدام ماثيماتكا كلغة برمجة لكتابة برامج تحل مشكلات كبيرة يعجز عن حلها أمر واحد وهذه البرامج لا تتعامل فقط مع الأعداد ولكن تتعامل أيضاً مع التعبيرات الرمزية ومع الأشكال المرسومة .

ولغة ماتيماتكا تعتبر لغة عالية المستوى جدا Very High Level Language ويطلق عليها أيضا لغة الجيل الرابع Fourth Generation Language لأنها تفعل في خطوة واحدة ما تفعله اللغات عالية المستوى (مثل بيسك BASIC وفورتران FORTRAN و سي C وباسكال PASCAL وغيرها) في عدة خطوات . ويوجد داخل برنامج ماتيماتكا built - in أكثر من 1000 دالة تخدم فروع الرياضيات المختلفة .

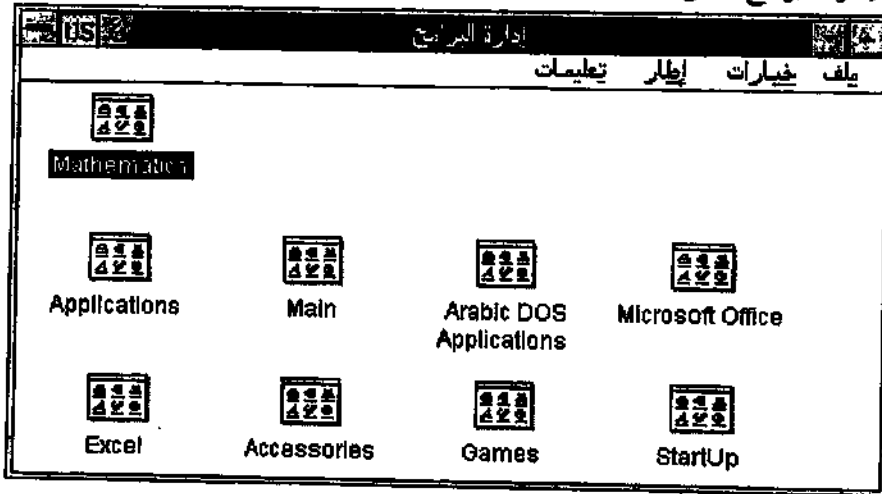
وبرنامج ماتيماتكا قام بتصميمه Stephen Wolfram وقامت شركة Wolfram Research بتقديم الإصدار الأول mathematica 2.0 في عام ١٩٨٨ ثم ظهر الإصدار الثاني mathematica 2.1 والإصدار الثالث mathematica 2.2

وقبل أن نعرف على استخدامات ماتيماتكا سوف نعرض أولا كيفية تشغيل برنامج ماتيماتكا من خلال برنامج النوافذ Windows .



١. تشغيل ماثيماتكا من خلال برنامج النوافذ Windows

قدمت شركة مايكروسوفت برنامج النوافذ Microsoft Windows في العديد من الإصدارات ويمكن من خلاله تشغيل عدة برامج في وقت واحد وتبادل المعلومات بينها وهذا الأسلوب يعرف بأسلوب تعدد المهام multitasking ويقوم برنامج النوافذ بتقسيم الشاشة الى مناطق تعرف بالنوافذ أو الإطارات وكل نافذة تطل على برنامج أو مجموعة من البرامج ولكل نافذة عنوان يكتب على قمة النافذة ويتم تشغيل البرامج من داخل النوافذ بأسلوب حدد الهدف الذى تختاره ثم أطلق point and shoot أي وجه المؤشر نحو البرنامج المطلوب تنفيذه ثم اضغط زر الفأرة الأيسر أو اضغط مفتاح الإدخال Enter. وبرنامج النوافذ مثل البرامج التطبيقية الأخرى يمكن تشغيله من محث نظام التشغيل فإذا تم إنزاله على الاسطوانة الصلبة Hard Disk فإنه يمكن تشغيله مباشرة عن طريق كتابة win ثم تضغط على مفتاح الإدخال Enter وعند بدء تشغيل برنامج النوافذ سوف تظهر نافذة إدارة البرامج Program Manager مشابهة للشكل (١) الآتي



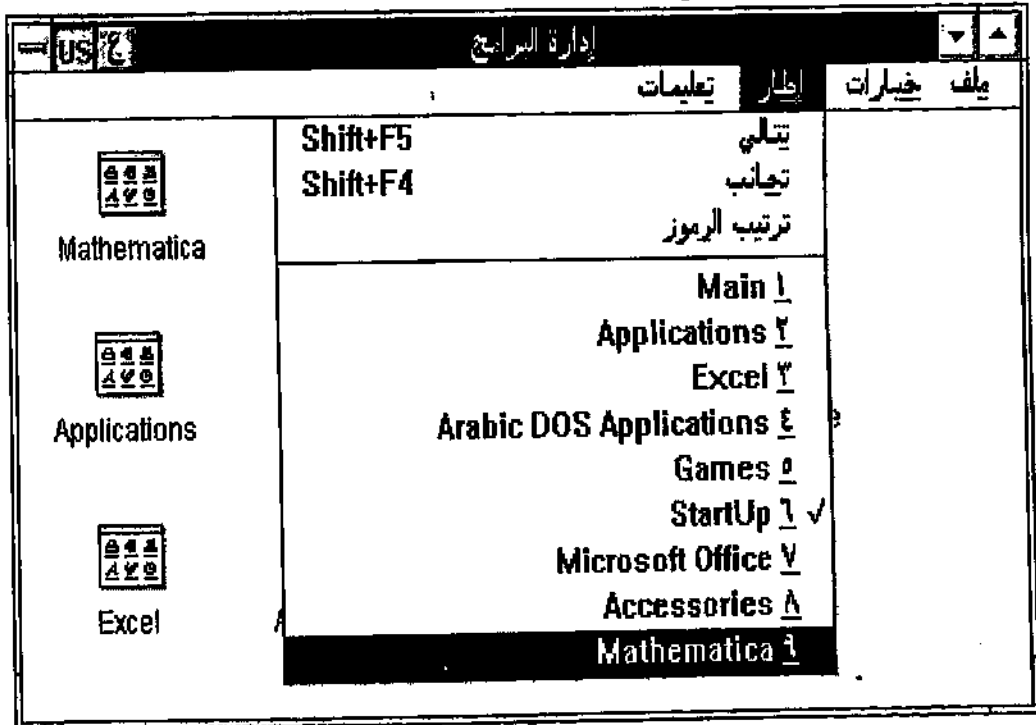
شكل (١)

ماتيماتيكا - الرياضيات باستخدام الكمبيوتر

وهناك عدة طرق لبدء تشغيل برنامج ماتيماتيكا

- يمكن بدأ تشغيله من مدير البرامج **Program Manager** كما نفعّل مسج معظم تطبيقات برنامج النوافذ **Windows** .
- كما يمكن تشغيله من مدير الملفات **File Manager** الموجود بالنافذة الرئيسية **Main** وذلك بأن نقر فوق أسم الملف **ma.exe** .

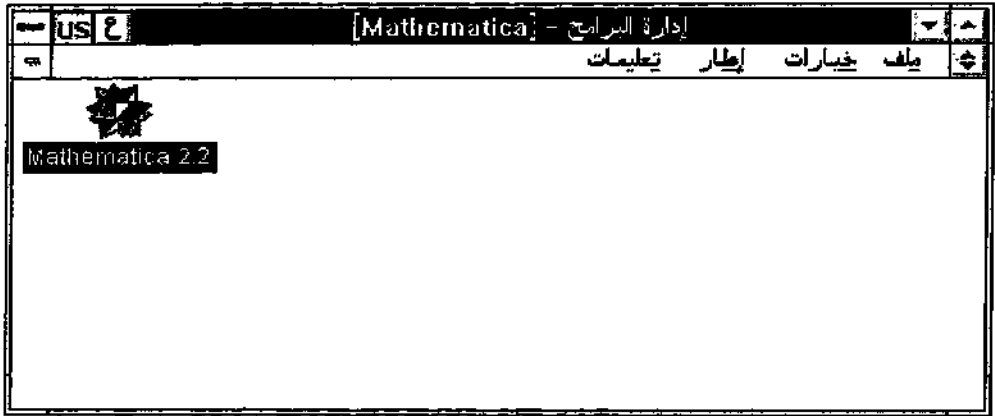
وفي الإصدار الأول **mathematica 2.0** كان يتم تشغيل برنامج ماتيماتيكا من بيئة نظام التشغيل **Dos** مباشرة ، وبفرض أن برنامج ماتيماتيكا **mathematica 2.2** قد تم إنزاله على الاسطوانة الصلبة بجهاز الكمبيوتر وذلك من خلال برنامج النوافذ **Windows** وأنه موجود في إطار من إطارات برنامج النوافذ تحت أسم **Mathematica** وبجعل هذا الإطار هو الإطار النشط وذلك عن طريق اختيار البرنامج **Mathematica** من قائمة إطار **Window** في إدارة البرامج كما هو موضح في الشكل (٢)



شكل (٢)

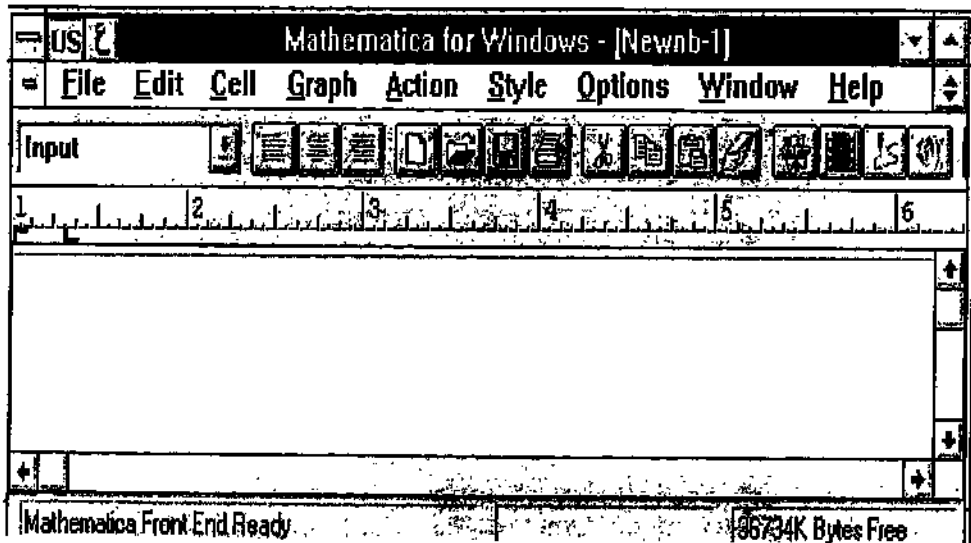
ماثميكا - الرياضيات باستخدام الكمبيوتر

وبعد الضغط على زر الفأرة يتم الدخول الى النافذة الخاصة ببرنامج ماثميكا وسوف تظهر شاشة مثل الموضحة في شكل (٣)





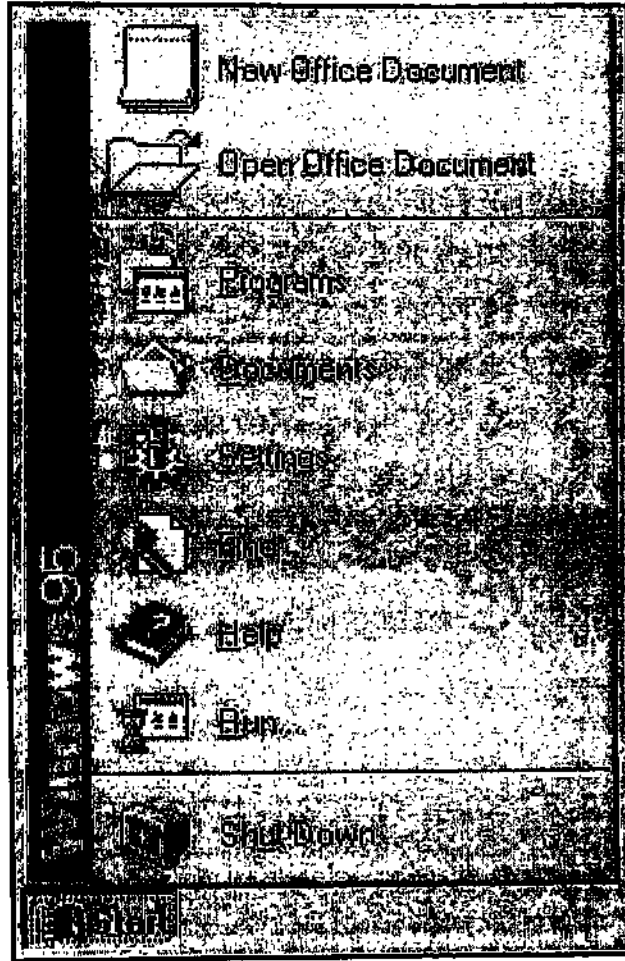
شكل (٣)

حيث تظهر أيقونة الرمز الخاص ببرنامج ماثميكا وعن طريق النقر مرتين بسرعة على هذا الرمز بواسطة الفأرة mouse بعد لحظات تظهر الشاشة المبينة في شكل (٤)



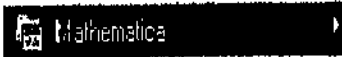
شكل (٤)

وإذا كان برنامج التوافد المستخدم  Windows 95 فإنه عند الضغط على المربع  الموجود في أسفل الشاشة من جهة اليسار فسوف تظهر قائمة كالموضحة في الشكل (٥) .



شكل (٥)

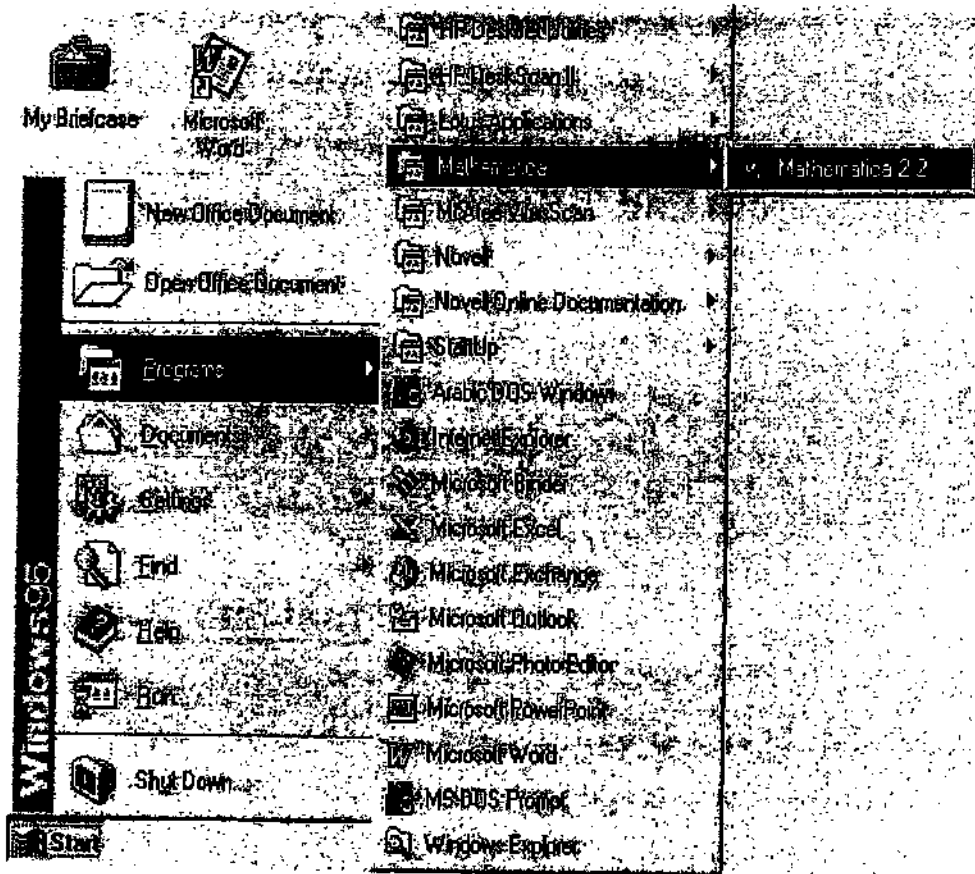
وبتحريك مؤشر الفارة الى الاختيار Programs ثم الضغط على زر الفارة تظهر قائمة أخرى



مثل الموضحة بالشكل (٦) ثم نضغط بزر الفارة على البرنامج

فتظهر الأيقونة الخاصة ببرنامج ماتيماتكا  وبالضغط عليها

يبدءا تحميل برنامج ماتيماتكا وتظهر شاشة كالمينة فى شكل (٤) ويتم ذلك على اعتبار أن برنامج ماتيماتكا mathematica 2.2 قد تم إنزاله على الاسطوانة الصلبة بجهاز الكمبيوتر .



شكل (٦)

وسوف نتعرف الآن على تركيب ماتيماتكا كبرنامج ، حيث تتيح معرفة هذا التركيب فهما اكثر لما يحدث أثناء استخدامنا لبرنامج ماتيماتكا على الكمبيوتر .

٢. القلب والواجهة فى ماثيماتيكاً Kernel and Front End in Mathematica

يتكون برنامج ماثيماتيكاً من جزئين أساسيين هما

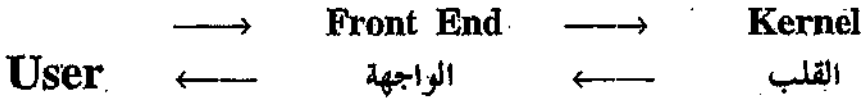
- القلب Kernel
- والواجهة Front End

أما القلب Kernel

فهو الجزء الذي يقوم بتنفيذ العمليات الرياضية المطلوبة ، ويتم تحميل القلب عن طريق كتابة أي عملية حسابية بسيطة فى بداية التشغيل مثل $1+1$ ثم نضغط على زر التنفيذ وهو مفتاح **Insert** الموجود على يمين لوحة المفاتيح ، ويمكن تحميل القلب مع بداية تشغيل ماثيماتيكاً عن طريق اختيار **Option** فى قائمة الاختيارات

وأما الواجهة Front End

فهي حلقة الوصل بين المستخدم User والقلب Kernel وعندما يعطى المستخدم أمر ما لـ ماثيماتيكاً لتنفيذه فإنه فى الحقيقة يعطيه للواجهة التي تقوم بترجمته الى شفرات خاصة يفهمها القلب ، وعندما ينفذ القلب هذا الأمر فإنه يخرج النتائج على هيئة شفرات تقوم الواجهة بترجمتها الى أرقام أو حروف أو رسومات أو ألوان حسب نتائج الأوامر المعطاة ويتم عرضها على الشاشة بطريقة يمكن فهمها والاستفادة منها وشكل (٧) يوضح العلاقة بين المستخدم والواجهة والقلب .



شكل (٧)

وبرنامج ماتيماتكا يوجد له إصدارات على العديد من نظم الكمبيوتر مثل نظام التشغيل دوس DOS ونظام وندوز Windows وماكنتوش Makintosh ونظام يونيكس Unix ، وفي كل هذه النظم يوجد نفس القلب أما الواجهة فتختلف من نظام الى آخر بمعنى أن ماتيماتكا على كل نظام من هذه النظم قادر على أداء نفس القدر من العمليات الرياضية وإخراج نفس النتائج ، والشكل (٤) يمثل الواجهة في نظام وندوز .

وطريقة إدخال الأوامر في ماتيماتكا يكون بظهور الحث Prompt على الصورة

In[n] :=

حيث يقوم المستخدم بكتابة المدخلات أو الأمر المطلوب تنفيذه وبعد الضغط على زر التنفيذ Insert الموجود على يمين لوحة المفاتيح يقوم ماتيماتكا بطباعة الناتج Output بجانب الحث


Out[n]=

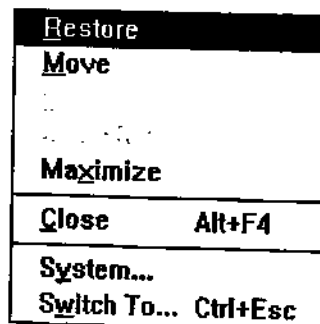
حيث n يمثل رقم المدخل لان ماتيماتكا يقوم بترقيم كل مدخلاته في ترتيب تصاعدي . بالنظر الى واجهة ماتيماتكا في شكل (٤) نرى أن الشاشة تنقسم الى ثلاثة أجزاء أساسية الجزء العلوي به أربعة صفوف

الصف الأول من أعلى عبارة عن الشريط الموضح



ويحتوي على الآتي :



- في الركن الأيسر يوجد مربع صغير  يسمى قائمة التحكم Control Panel وهو موجود في جميع تطبيقات النوافذ ويتحرك مؤشر الفأرة نحو هذا المربع ثم الضغط على زر الفأرة تفتح قائمة التحكم الآتية



ومن خلال هذه القائمة يمكن نقل Move أو تكبير Maximize أو تصغير Minimize نافذة البرنامج أو غلق النافذة Close والخروج من البرنامج أو التبديل الى برنامج آخر Switch To

- المربع **[US]** بالضغط عليه بالفارة يتم تحويل الكتابة الى اللغة الإنجليزية

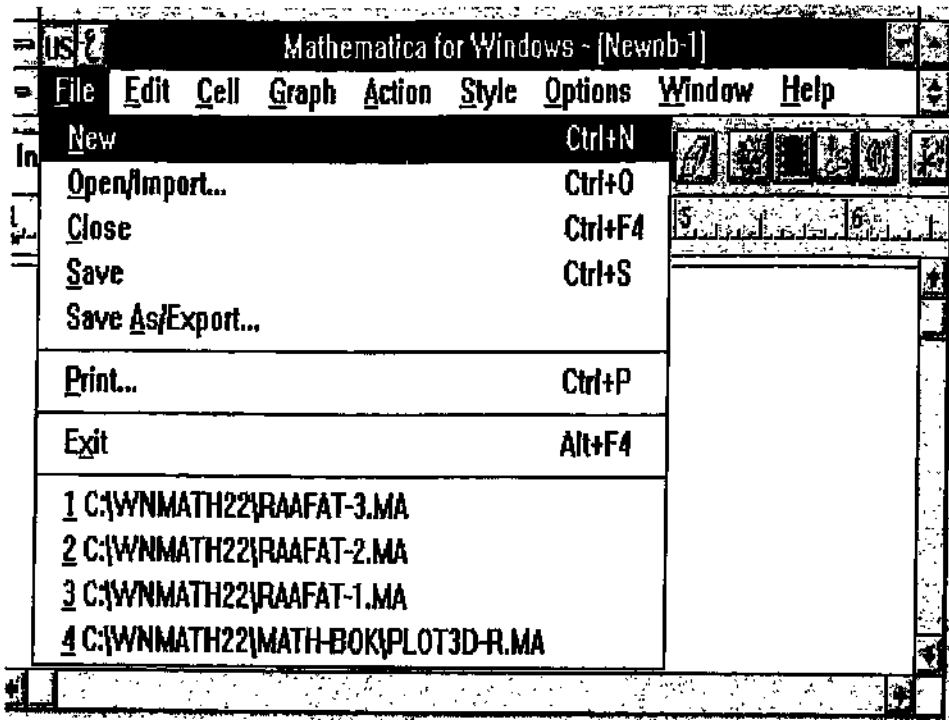
- المربع **[E]** بالضغط عليه بالفارة يتم تحويل الكتابة الى اللغة العربية

- في منتصف الشريط يوجد عنوان البرنامج **Mathematica on Windows** وأسم الملف الذي يتم التعامل معه وبرنامج ماتيماتيكا يقوم بإعطاء الاسم **Newnb-1** للملف عند بداية التشغيل ويمكن للمستخدم حفظ الملف بعد ذلك بالاسم الذي يريده
- في الركن الأيمن يوجد مثلثان صغيران أحدهما يشير الى أعلى  ويستخدم لتكبير واجهة البرنامج والآخر الى اسفل  ويستخدم لتصغير واجهة البرنامج ويتم ذلك عن طريق تحريك مؤشر الفارة نحو رمز المثلث المطلوب ثم الضغط على زر الفارة .

الصف الثاني من أعلى هو صف القائمة الرئيسية **Bar menu** وبه مجموعة الاختيارات الآتية

File Edit Cell Graph Action Style Options Window Help

وتتحريك المؤشر نحو الاختيار المطلوب ثم الضغط على زر الفارة الأيسر فانه يخرج من هذا الاختيار قائمة مسحوبة تسمى بالقائمة العمودية وبها مجموعة من الاختيارات التي تسهل من العمل داخل ماتيماتيكا ، فمثلا عند الضغط بالفارة على الاختيار **F**ile الموجود في صف القائمة الرئيسية (أو بالضغط على مفتاح **Alt** مع الحرف **F**) تظهر الشاشة الموضحة بالشكل (٨) وبها نجد مجموعة من الاختيارات الفرعية في القائمة العمودية .



شكل (٨)

وبرنامج ماتيماتكا يخصص بعض المفاتيح لأداء مهمة معينة والرموز الخاصة بهذه المفاتيح تكتب أمام الخيار في القائمة ويطلق عليها مفاتيح الاختصار Sort Cut Keys فمثلا القائمة الخاصة بالاختيار File تحتوي على الآتي :

الخيار	مفاتيح الاختصار	الوظيفة التي يقوم بها الخيار
<u>N</u> ew	Ctrl + N	عمل ملف جديد داخل ماتيماتكا
<u>O</u> pen / Import	Ctrl + O	فتح ملف سبق تخزينه بواسطة برنامج ماتيماتكا
<u>C</u> lose	Ctrl + F4	إغلاق الملف المفتوح
<u>S</u> ave	Ctrl + S	حفظ الملف تحت اسمه السابق
<u>P</u> rint	Ctrl + P	طباعة الملف على جهاز الطباعة

وفى نهاية القائمة العمودية الخاصة بالاختيار **File** تظهر أسماء آخر أربعة ملفات سبق التعامل معها حيث يتم فتح أي منها بمجرد الضغط على أسم الملف المطلوب. وعند التعامل مع بعض الخيارات بالقوائم العمودية تظهر صناديق حوارية يطلق عليها **dialog boxes** وتحتوى هذه الصناديق على رسائل أو خيارات من ضمنها

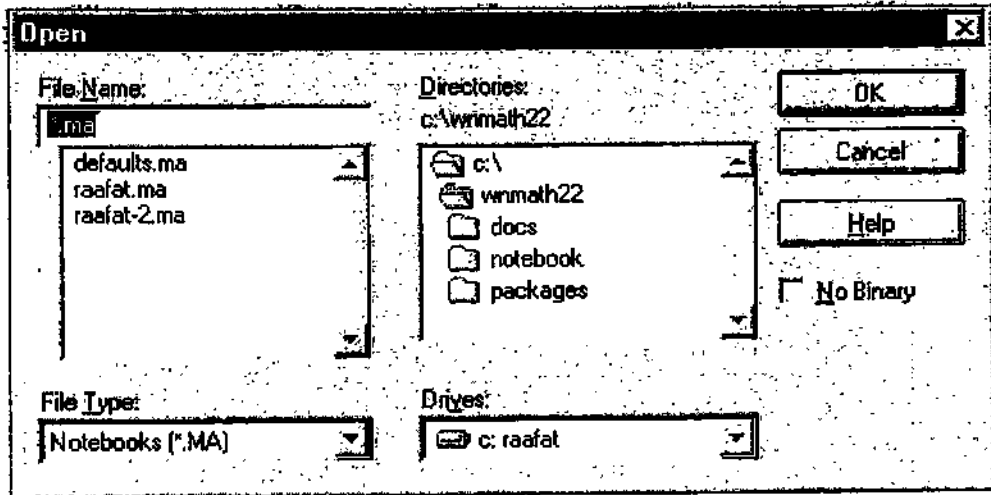


خيار موافق



وخيار إلغاء الأمر

فمثلاً عند الضغط بمؤشر الفأرة على الخيار **Open** من القائمة العمودية **File** يظهر صندوق حوارى مثل الموجود بالشكل (٩)











شكل (٩)

وبعد تحديد أسم الملف المطلوب فتحه من الخيار **File Name** ومكان وجوده على القرص من الخيار **Drives** ثم الضغط بمؤشر الفأرة على موافق **OK** يتم فتح الملف المطلوب. وعن طريق الاختيار **Help** من صف القائمة الرئيسية يمكن التعرف على شرح وافى لخصائص برنامج ماثماتيكاً.

والصف الثالث من أعلى عبارة عن شريط رمادي اللون وهو قائمة الأدوات Tool bar الموضحة



وتحتوى قائمة الأدوات على الكثير من الرموز مثل

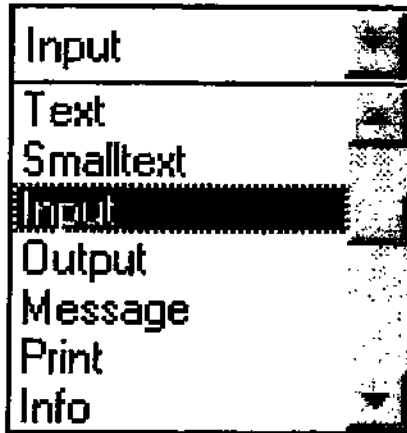
الرمز	الوظيفة التى يقوم بها
	New فتح وثيقة جديدة
	Open فتح ملف قديم
	Save حفظ الملف
	Print طباعة الملف
	Cut القص
	Copy النسخ
	Paste اللصق
	Insert تنفيذ الأمر

وهذه الرموز تساعد المستخدم فى التعامل مع ماتيماتكا وتنفيذ المهام بسرعة .

Input

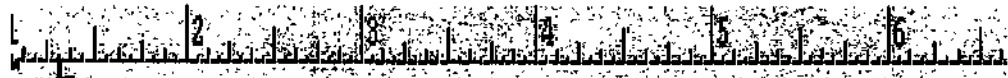
وفي بداية قائمة الأدوات من اليسار يوجد الاختيار

وبالضغط على السهم  تفتح القائمة العمودية الآتية



وعن طريق هذه القائمة يمكن التحكم في شكل ومواصفات البيانات المدخلة أو البيانات الناتجة .

والصف الرابع يوجد في نهاية الجزء العلوى وهو شريط رمادى اللون وبه مسطرة ،



والجزء السفلى من الشاشة عبارة عن شريط رمادى اللون يسمى شريط الحالة **Status bar** ويحتوى على بعض البيانات التى نخبرنا عن حالة ماتيماتيكا كل لحظة من حيث حجم الذاكرة المتاح وبيانات عن العمليات التى يتم إدخالها وتنفيذها



وأعلى هذا الشريط وفي الجانب الأيمن من الشاشة توجد شرائط التصفح أو شرائط التمرير وعن طريق المؤشرات الموجودة بها يمكن رؤية المزيد من المعلومات على الواجهة والتى قد تعجب في أثناء العمل .



أما المساحة البيضاء المحصورة بين الجزء العلوى والجزء السفلى فى الواجهة فإنها تمثل منطقة العمل ويتم فيها كتابة الأوامر والعمليات المطلوب تنفيذها بنفس الطريقة التى نكتب بها فسى أى

برنامج معالج كلمات Word Processing فمثلا


- لمسح حرف على يسار المؤشر نضغط على مفتاح Backspace
- لمسح حرف على يمين المؤشر نضغط على مفتاح Del
- للانتقال الى سطر جديد نضغط على المفتاح Enter


ويمكن الاستفادة من مزايا العمل تحت نظام النوافذ Windows مثل ميزة


- النسخ Copy
- القص Cut
- اللصق Paste

فمثلا عندما نريد تنفيذ عملية تم كتابتها من قبل فإنه يمكن الذهاب إليها بالمؤشر وتظليلها بالفارة ثم الذهاب بالمؤشر الى الاختيار Edit فى صف القائمة الرئيسية والضغط على الأمر



Copy لعمل نسخة من الجزء المظلل (أو بالضغط بمؤشر الفارة مباشرة على الرمز  أو بالضغط على المفتاح Ctr والمفتاح V معا من لوحة المفاتيح) وبعد ذلك نذهب بالمؤشر الى المكان المطلوب لصق النسخة فيه ثم نضغط على الأمر Paste من الاختيار Edit (أو

بالضغط بمؤشر الفارة مباشرة على الرمز  أو بالضغط على المفتاح Ctr والمفتاح X معا من لوحة المفاتيح) وبعد الحصول على النسخة المطلوبة يتم تنفيذها أو عمل التعديلات المطلوبة بها قبل التنفيذ مما يوفر الوقت . ولإرسال أى أمر لتنفيذه بعد كتابته نضغط على

مفتاح التنفيذ Insert (أو بالضغط بمؤشر الفارة مباشرة على الرمز ) .

مفتاح التنفيذ Insert
بمفتاح الإدخال Enter

وخلال دراستنا عندما نذكر جملة أرسل الأمر فهذا يعنى كتابة الأمر بعد ظهور الحث الخاص

بماتيماتكا وتنفيذه عن طريق الضغط على مفتاح التنفيذ Insert .

٣ . الحصول على معلومات من ماتيماتيكا Getting Information from Mathematica

فى كثير من الأحيان نحتاج الى التعرف على المعلومات الخاصة بالأوامر والدوال المختلفة فى ماتيماتيكا والتعرف على الصيغة العامة وكيفية كتابة كل من هذه الأوامر وماتيماتيكا يقدم لنا ذلك عن طريق رمز علامة الاستفهام ؟ فعندما ندخل الأمر

? Name

حيث Name يمثل أسم الأمر أو الدالة المطلوب الاستعلام عنها وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيد تظهر الصيغة العامة وجميع المعلومات الخاصة بالأمر Name ويراعى أن يكون الحرف الأول فقط من أسم الأمر أو الدالة مكتوب بالحروف الكبيرة Capital وإذا كان أسم الأمر يحتوى على كلمتين أو أكثر فإن كل كلمة فى الأمر تبدأ بحرف كبير ، فمثلا لمعرفة الصيغة العامة للدالة Log يرسل الأمر

? Log

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيد يظهر الآتي

Log[z] gives the natural logarithm of z (logarithm to base E)

Log[b, z] gives the logarithm of z to base b.

أي أن الأمر **Log[z]** يقوم بحساب قيمة اللوغاريتم الطبيعي للعدد z للأساس e والأمر فى الصيغة **Log[b, z]** يقوم بحساب قيمة اللوغاريتم للعدد z للأساس b

?Plot

ولمعرفة الصيغة العامة لأمر الرسم Plot يرسل الأمر

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيد يظهر الآتي

Plot[f, {x, xmin, xmax}] generates a plot of f as a function of x from xmin to xmax.

Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}] plots several functions fi.

أي أن الأمر **Plot[f, {x, xmin, xmax}]** يقوم برسم الدالة $f(x)$ في النطاق من

$x = \text{xmin}$ إلى $x = \text{xmax}$

والأمر في الصيغة **Plot[{f1, f2,...}, {x, xmin, xmax}]** يقوم برسم مجموعة

الدوال $f1, f2, \dots$

في النطاق من $x = \text{xmin}$ إلى $x = \text{xmax}$

وللتعرف على معلومات إضافية عن أمر الرسم **Plot** مثل التعرف على الخيارات التي يمكن

إضافتها إلى الرسم يرسل الأمر

?? Plot

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيد يظهر الآتي

Plot[f, {x, xmin, xmax}] generates a plot of f as a function of x from xmin to xmax. **Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}]** plots several functions fi.

Attributes[Plot] = {HoldAll, Protected}

Options[Plot] =

{AspectRatio -> GoldenRatio^(-1), Axes -> Automatic, AxesLabel -> None, AxesOrigin->Automatic,AxesStyle->Automatic,Background->Automatic, ColorOutput -> Automatic,Compiled -> True, DefaultColor -> Automatic, Epilog-> {},Frame-> False,FrameLabel-> None,FrameStyle-> Automatic, FrameTicks -> Automatic, GridLines -> None, MaxBend -> 10., PlotDivision -> 20., PlotLabel -> None, PlotPoints -> 25, PlotRange -> Automatic,PlotRegion -> Automatic, PlotStyle -> Automatic, Prolog -> {}, RotateLabel -> True, Ticks -> Automatic, DefaultFont -> \$DefaultFont, Display Function-> \$DisplayFunction}

ونلاحظ وجود قائمة كبيرة من الخيارات التي تستخدم مع أمر الرسم Plot سوف نتعرف عليها بالتفصيل في الباب الخامس (ماثيماتكا ورسم الدوال) ،

وللتعرف على جميع الأوامر والدوال التي تبدأ بحرف A يرسل الأمر

?A*

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيد يظهر الآتي

Abort	Append	AbortProtect	AppendTo
Above	Apply	Abs	ArcCos
AbsoluteDashing	ArcCosh	AbsolutePointSize	ArcCot
AbsoluteThickness	ArcCoth	AbsoluteTime	ArcCsc
CcountingForm	ArcCsch	Accumulate	ArcSec
Accuracy	ArcSech	AccuracyGoal	ArcSin
AddTo	ArcSinh	AiryAi	ArcTan
AiryAiPrime	ArcTanh	AiryBi	Arg
AiryBiPrime	AlgebraicRules	Array	AspectRatio
Alias	AtomQ	All	Attributes
Alternatives	Automatic	AmbientLight	Auxiliary
Analytic	Axes	AnchoredSearch	AxesEdge
And	AxesLabel	Apart	AxesOrigin
ApartSquareFree	AxesStyle		
ArithmeticGeometricMean			
AlgebraicRulesData			

حيث يظهر بيان بجميع الأوامر والدوال الموجودة في برنامج ماثيماتكا. والتي تبدأ بحرف A وقد استخدمنا الرمز * ليحل مكان أي عدد من الحروف يكتب بعد الحرف A ويمكن الاستعلام عن أي من هذه الأوامر أو الدوال كما سبق وذكرنا ، ومن ذلك نرى أنه بواسطة الرمز ? يمكن التعرف على شرح والى لجميع الأوامر والدوال في ماثيماتكا. ويوجد رمز آخر هو علامة النسبة المئوية % من خلاله يتيح لماثيماتكا إمكانية إجراء عمليات على ناتج أخرجه من قبل ،

مثال توضيحي

-- إذا أدخلنا إلى ماتيماتكا عملية مثل $3+5$ فإن الناتج يكون 8

-- وإذا أردنا إجراء عملية على هذا الناتج مثل طرح 2 منه فإننا نشير إلى هذا الناتج بعلامة النسبة المئوية % وبالتالي بدلاً من كتابة $8-2$ يكتب 2% فيخرج لنا الناتج 6

-- وإذا أردنا إجراء عملية أخرى على نفس الناتج الأول 8 بقسمته على 4 فإننا نشير إلى الناتج 8 بعلامة نسبة مئوية % لان الناتج 8 يسبق هذه العملية بعمليتين كما يلي 14% فيخرج لنا الناتج 2 .

ولما كان ماتيماتكا يرقم لنا كل من مدخلاته ومخرجاته ترقيم تصاعدي فإن هناك طريقة اسهل خاصة إذا كان المطلوب إجراء عملية على ناتج أخرجه ماتيماتكا قبل العملية الحالية بعدد كبير من العمليات وفي هذه الحالة توضع علامة النسبة المئوية يليها رقم ذلك الناتج حسب الترقيم المعطى من ماتيماتكا

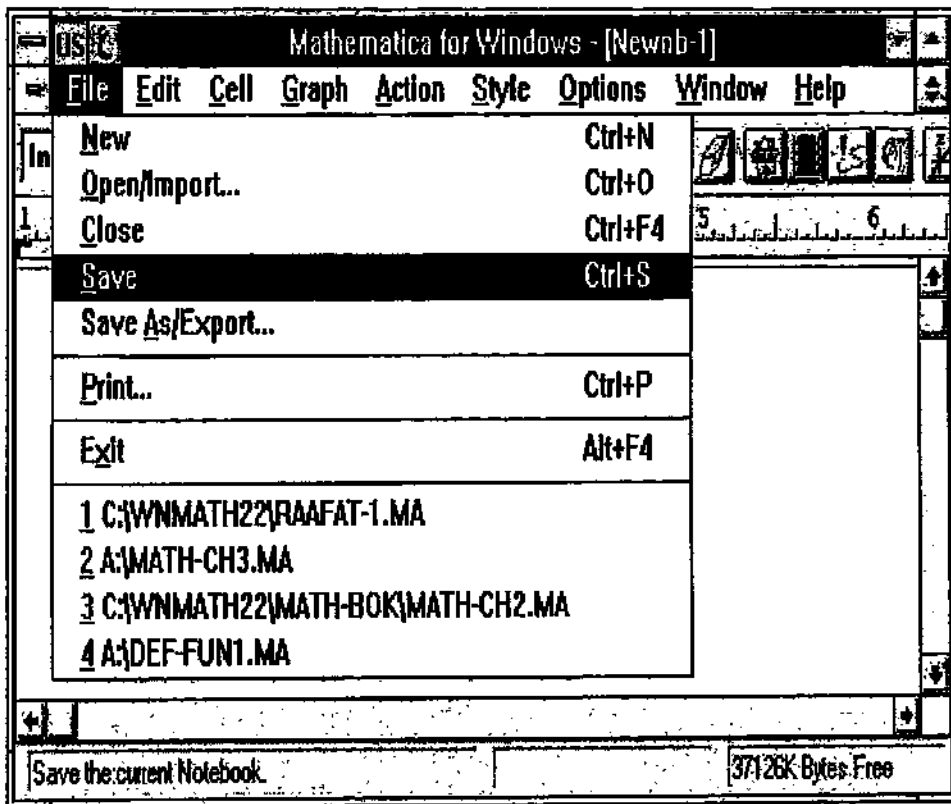
ولتوضيح ذلك

-- إذا كان 8 في المثال السابق هو ناتج العملية رقم 40 (Out[40]) وأردنا طرح 2 منها فإننا نكتب

$40 - 2\%$

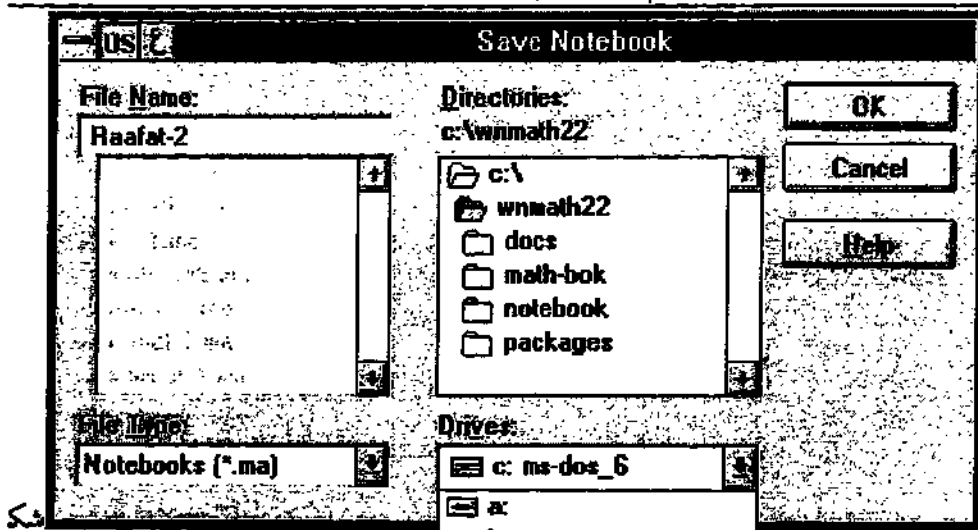
فيخرج لنا الناتج 6 .

ويقوم برنامج ماتيماتيكا بتسجيل كل ما يكتب وينفذ من أوامر فى ملف يسمى دفتر notebook وفى نهاية العملية يقوم المستخدم user بحفظ هذا الدفتر فى ملف تحت أسم يختاره المستخدم ويتكون اصل الاسم root name من حرف الى ثمانية حروف ويقوم ماتيماتيكا بوضع الاسم الممتد extension الخاص به وهو ma ويتم الحفظ عن طريق الضغط بمؤشر الفارة على **File** فى شريط القائمة الرئيسية فى أعلى الواجهة فتظهر قائمة عمودية مثل الموضحة فى شكل (١٠) .



شكل (١٠)

وبالضغط بمؤشر الفارة على الأمر **Save** تظهر نافذة أخرى كما فى الشكل (١١)



ل (١١)

وبعد كتابة أسم الملف نقوم باختيار المكان الذي سيحفظ فيه على القرص الصلب C أو أقراص مرنة A , B ويتم ذلك بالضغط بمؤشر الفارة على الرمز

Drives:

وفي الشكل (١١)

- تم تسمية الملف باسم Raafat-2.ma





- وتم تخزينه على القرص الصلب C داخل الفهرس المفتوح

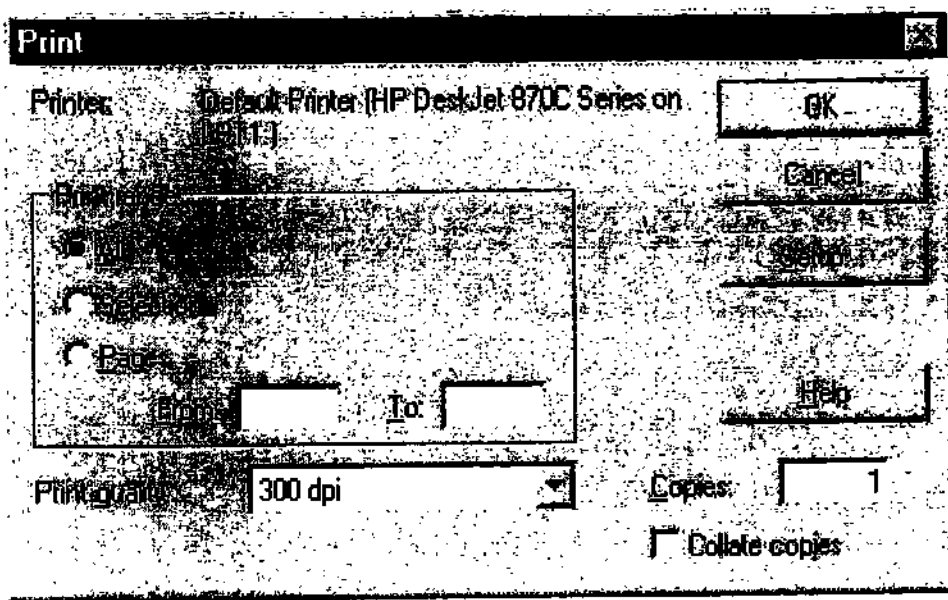


وبالضغط على موافق يتم التخزين

وأثناء التعامل مع الملف المفتوح Raafat-2.ma يمكن تكرار تخزينه ويتم ذلك بالضغط مباشرة على الاختيار **Save** وفي هذه الحالة يتم التخزين مباشرة دون ظهور النافذة الخاصة

بالأمر **Save** ويمكن عمل ذلك مباشرة بالضغط بمؤشر الفارة على الرمز  الموجود في قائمة الأدوات ويمكن حفظ الملف تحت أسم آخر وذلك بالضغط على الاختيار **Save As**. ولطباعة الملف على الورق نضغط بالفارة على الخيار **Print** من القائمة العمودية

File (أو بالضغط مباشرة على الرمز ) من قائمة الأدوات) فيظهر صندوق حوارى كما فى الشكل (١٢)



شكل (١٢)

وبواسطة مؤشر الفأرة يتم الانتقال الى الخيارات الفرعية داخل الصندوق الحوارى



لتحديد عدد النسخ المطلوبة



ولتحديد الصفحات المطلوب طباعتها على الورق



وتتم الطباعة على الورق بالضغط على موافق

وبنفس الطريقة يمكن التحول الى أي قائمة فى صف القائمة الرئيسية وتنفيذ كل ما فيها من مهام .

ومن المميزات الهامة في برنامج ماتيماتكا انه بالإضافة الى الدوال الكثيرة الموجودة في قلب ماتيماتكا والتي تشمل العديد من فروع الرياضيات فإنه يمكن للمستخدم تعريف الدوال الخاصة به وذلك لان ماتيماتكا يستخدم كلفة برمجة وكذلك توجد حزم **packages** لموضوعات متخصصة في الرياضيات وكل حزمة تحتوي على تعريفات رياضية لدوال متخصصة في فرع دقيق من الرياضيات فمثلا توجد حزم متخصصة في كل من الفروع الآتية :

Algebra	الجبر
Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Geometry	الهندسة
Linear Algebra	الجبر الخطي
Number Theory	نظرية الأعداد
Numerical Analysis	والتحليل العددي
Vector Analysis	تحليل المتجهات
Statistics	الإحصاء
Linear Programming	البرمجة الخطية
Fourier Transforms	تحويلات فوريير
Laplace Transforms	تحويلات لابلاس

و يتم استدعاء الحزمة عن طريق إرسال الأمر **<<PackageName** حيث **PackageName** تمثل أسم الحزمة المطلوب استدعاؤها .

٤ . التعبيرات فى ماتيماتيكا Mathematica and Expressions

برنامج ماتيماتيكا يتعامل مع أنواع عديدة ومختلفة من الأشياء مثل الصيغ الرياضية **mathematical formulas** والقوائم **lists** والرسوم **graphs** وعلى الرغم من أن هذه الأشياء غالبا ما تبدو مختلفة لكن ماتيماتيكا يتعامل معها جميعا بشكل قياسي فى صورة تعبيرات **expressions** فمثلا $f[x]$ يمثل تعبير فى ماتيماتيكا لتعريف دالة $f(x)$ هذه الدالة لها الاسم f وذات متغير واحد x كذلك $g[x,y]$ تمثل دالة $g(x,y)$ لها الاسم g وذات متغيرين x, y . أيضا العملية الحسابية $x + y$ تمثل تعبير فى ماتيماتيكا حيث يقوم القلب فى ماتيماتيكا بتحويله الى الشكل القياسى **Plus[x,y]** والدالة **Plus** تمثل أسم دالة الجمع وعند طباعة الناتج مرة أخرى على الواجهة الأمامية يكتب بالصورة $x + y$ وبالمثل المؤثرات الأخرى مثل الضرب والقسمة والرفع الى أس كل منها له شكل قياسي .

$X + y + z$	Plus[x,y,z]
$x y$	Times[x,y]
x^n	Power[x,n]
$\{x,y,z\}$	List[x,y,z]
$a \rightarrow b$	Rule[a,b]
$a=b$	Set[a,b]

بعض الأمثلة لتعبيرات فى ماتيماتيكا

وفي الحقيقة فإن كل شيء يتم كتابته في الواجهة الأمامية لبرنامج ماتيماتيكا يعامل كتعبير له اسم يطلق عليه رأس التعبير **Head** وهذا الاسم قد يمثل

- عملية **Operation** مثل الجمع أو الطرح **Plus** ، الضرب أو القسمة **Times**
- بناء **Structure** مثل القائمة **List**

ويأخذ الاسم معامل **argument** أو أكثر **Name[arguments]** ويجب ملاحظة أن معاملات جميع الدوال في ماتيماتيكا توضع داخل أقواس مربعة من النوع [] .

Head للاستعلام عن اسم التعبير يستخدم الأمر
FullForm للاستعلام عن الشكل القياسي أو البناء الكامل للتعبير يستخدم الأمر

وفي الجدول الآتي نضع بعض الأمثلة لاستخدام الأمر **Head** والأمر **FullForm**

In[1]:=Head[x+y+z] Out[1]:=Plus	عند تطبيق الدالة Head على العملية $x+y+z$ فإن الناتج يكون Plus
In[2]:= FullForm[x+y+z] Out[2]:=Plus[x,y,z]	عند تطبيق الدالة FullForm على العملية $x+y+z$ فإن الناتج يكون Plus[x,y,z]
In[3]:= Head[x*y] Out[3]:=Times	عند تطبيق الدالة Head على العملية $x*y$ فإن الناتج يكون Times
In[4]:= Head[x*y+z] Out[4]:=Plus	عند تطبيق الدالة Head على العملية $x*y+z$ والتي تشمل ضرب $x*y$ ثم الجمع إلى z فإن الناتج يكون Plus والذي يمثل عنوان العملية النهائية
In[5]:= FullForm[x*y+z] Out[5]:=Plus[Times[x, y], z]	عند تطبيق الدالة FullForm على العملية $x*y+z$ فإن الناتج يكون Plus[Times[x, y], z]
In[6]:=FullForm[4+5x^2] Out[6]:=Plus[4,Times[5,Power[x,2]]]	عند تطبيق الدالة FullForm على العملية $4+5x^2$ فإن الناتج يكون Plus[4,Times[5,Power[x,2]]]

إذا كان التعبير يحتوي على أجزاء متعددة ومتداخلة فيمكن التعرف على البناء الشجري

Tree Structure باستخدام الأمر Tree Form

In[7]:=TreeForm[x^3+(1+x)^2]

Out[7]=

Plus[
Power[x, 3] ,
Power[1, 2]
Plus[1, x]

وعند تطبيق الدالة Head على عدد صحيح Integer أو عدد نسبي Rational أو عدد مركب Complex فإن الناتج يمثل نوع العدد .

In[8]:Head[25]

عند تطبيق الدالة Head على العدد 25 فإن

Out[8]:=Integer

الناتج يكون عبارة صحيح Integer والتي

تفيد نوع العدد المستخدم

In[9]:Head[3/4]

عند تطبيق الدالة Head على العدد $\frac{3}{4}$ فإن

Out[9]:= Rational

الناتج يكون عدد نسبي Rational

In[10]:Head[2.4]

عند تطبيق الدالة Head على العدد 2.4 فإن

Out[10]:=Real

الناتج يكون عدد حقيقي Real

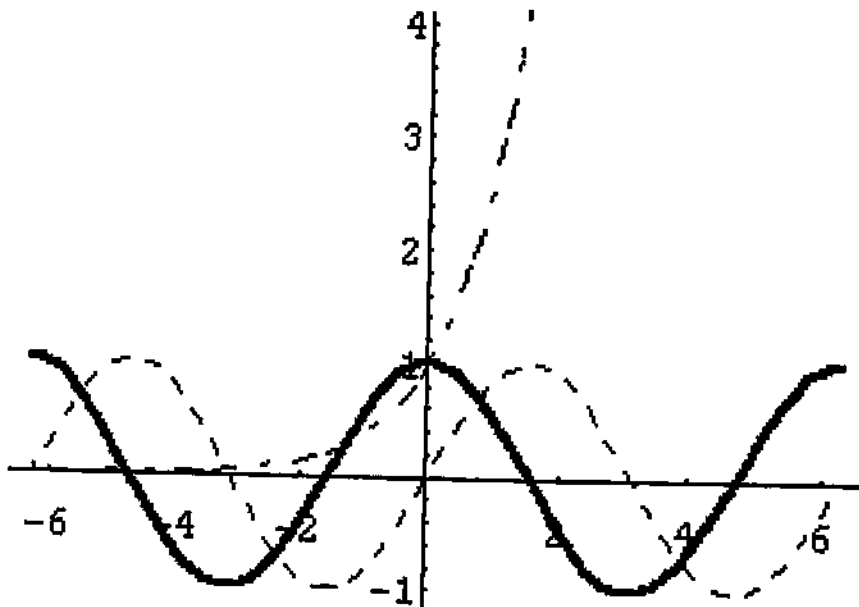
In[11]:Head[3+4I]

عند تطبيق الدالة Head على العدد 3+4I فإن

Out[11]:=Complex

الناتج يكون عدد مركب Complex

الباب الثانى ماثيماتىكا والدوال العددية



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتىكا
والخاصة بالموضوعات الآتية :

- | | |
|-----------------------------|-------------------------|
| Numerical Calculations | ١ . الحسابات العددية |
| Number Systems | ٢ . الأنظمة العددية |
| Variables | ٣ . المتغيرات |
| Some Mathematical Functions | ٤ . بعض الدوال الرياضية |
| Complex Numbers | ٥ . الأعداد المركبة |

الباب الثانى

ماثيماتيك والدوال العددية

برنامج ماثيماتيك يحتوى على العديد من الدوال العددية وكما علمنا فإن ماثيماتيك يتيح للمستخدم الاستعلام عن كافة الأوامر والدوال باستخدام الرمز ؟ لذلك يمكن استخدام هذا الرمز للاستعلام عن جميع أوامر ودوال ماثيماتيك لتتعرف على الصيغة العامة لكل من هذه الأوامر وسوف نعطى أمثلة توضيحية لكل أمر من هذه الأوامر .

١. الحسابات العددية Numerical Calculations

فى ماثيماتيك يوجد أربعة أنواع من الأعداد. وهى

Integers	- الأعداد الصحيحة
Rational	- الأعداد النسبية
Real	- الأعداد الحقيقية
Complex	- الأعداد المركبة

ويستخدم ماثيماتيك رموز المؤثرات الحسابية المعروفة وهى

+	مؤثر الجمع
-	مؤثر الطرح
*	مؤثر الضرب
/	مؤثر القسمة
^	مؤثر الرفع الى أس

x^y	Power	الرفع إلى أس
$x + y$	Add	الجمع
$x - y$	Subtraction	الطرح
$x y$ (or) $x * y$	Multiply	الضرب
x / y	Divide	القسمة

المؤثرات الحسابية في ماتيماتكا

ويمكن استخدام ماتيماتكا كأداة لأجراء العمليات الحسابية تماما مثل الآلة الحاسبة
Calculator .

In[1]:=3.5+6.823

لحساب مجموع عددين

Out[1]= 10.323

In[2]:=2.5/7.3

لحساب خارج قسمة عددين

Out[2]= 0.342466

ونلاحظ أن الناتج عدد في الصورة العشرية

In[3]:= (7^2-25*3)/(23+5^4)+42 عند إدخال هذه الكمية الحسابية نلاحظ أن الناتج

Out[3]= $\frac{13595}{324}$

عدد نسبي لأن الأعداد المستخدمة أعداد صحيحة

وعند عمل الحسابات على الآلة الحاسبة العادية فإن النتائج تكون الى دقة معينة ، مثلا عشرة أرقام عشرية ، ولكن مع ماتيماتكا غالبا ما نحصل على نتائج مضبوطة exact results

في ماتيماتكا نحصل على قيمة مضبوطة للعدد 2^{100} على الرغم من أن الناتج يحتوى على 31 رقم

In[4]:=2^100

Out[4]=1267650600228229401496703205376

وفي ماتيماتكا يمكن الحصول على ناتج عددي تقريبي للكميات الحساسة وذلك باستخدام الأمر N كما يمكن الحصول على النتائج مقربة الى أي درجة دقة مطلوبة كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
N[expr] or expr//N	للحصول على قيمة عددية للتعبير expr
N[expr,n]	للحصول على قيمة عددية للتعبير expr مقربة الى n من الأرقام العشرية
Rationalize[x]	للحصول على عدد نسبي Rational تقريبي للعدد x
Precision[x]	لمعرفة عدد الخانات العشرية decimal digits في العدد x
Accuracy[x]	لمعرفة عدد الخانات المعنوية Significant digits على يمين العلامة العشرية في العدد x

In[5]:=2^100//N

للحصول على قيمة عددية تقريبية للعدد 2^{100}

Out[5]= 1.26765 10³⁰

In[6]:= N[2^100,15]

للحصول على 2^{100} مقربا الى 15 من الأرقام العشرية

Out[6]= 1.26765060022823 10³⁰

In[7]:= N[%3] للحصول على قيمة عددية تقريبية للكمية الحسابية
Out[7]: 41.9599 المدخلة في جملة الإدخال In[3]

In[8] := (7^2-25*3)/(23+5^4)+42//N ويمكن عمل ذلك بطريقة أخرى كما يلي
Out[8]= 41.9599

In[9]:= N[(7^2-25*3)/(23+5^4)+42,20] وللحصول على الناتج من العملية الحسابية
Out[9]= 41.959876543209876543 مقربا الى 20 رقم عشري

In[10]:=Rationalize[%] وللحصول على الناتج السابق في صورة
Out[10]= $\frac{13595}{324}$ عدد نسبي تقريبي

In[11] := Precision[%9] لمعرفة عدد الخانات العشرية في العدد
Out[11]= 20 الناتج من جملة الإدخال In[9]

In[12] := Accuracy[%9] لمعرفة عدد الخانات المعنوية على يمين
Out[12]= 18 العلامة العشرية في العدد الناتج من
جملة الإدخال In[9]

٢ . الأنظمة العددية Number Systems

النظام العشري Decimal System يعتبر أقدم نظام عددي عرفه الإنسان فقد ابتكره القدماء المصريين منذ حوالي 3400 سنة قبل الميلاد وهو من أشهر الأنظمة العددية وأكثرها انتشاراً ، والأرقام المستخدمة في النظام العشري هي 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 ، وعدددها عشرة أرقام لذلك فإن أساس Base النظام العشري يساوي 10 ، ومع ظهور الحاسبات الآلية ظهرت الحاجة الى استخدام أنظمة عددية أخرى وفي الجدول الآتي نوضح بعض الأنظمة العددية وأساس كل نظام والأرقام المستخدمة فيه .

الأنظمة العددية	أساس النظام Base	الأرقام المستخدمة
النظام الثنائي Binary System	2	0 , 1
النظام الثماني Octal System	8	0,1,2,3,4,5,6,7
النظام السداسي عشري Hexadecimal System	16	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,a,b,c,d,e,f

وفي برنامج ماتيماتكا يمكن تحويل الأعداد الصحيحة أو الكسرية بين الأنظمة العددية المختلفة ، وإذا كان أساس النظام الذي يتم التعامل معه أكبر من 10 فإنه يتم استخدام الحروف الأبجدية من a الى z حيث a تمثل 10 ، b تمثل 11 ، c تمثل 12 وهكذا ، ويتم التحويل بين الأنظمة العددية المختلفة كالآتي :

b^{nnnnn}	لتحويل العدد $nnnnn$ من النظام ذو الأساس b الى النظام العشري
BaseForm[x,b]	لتحويل العدد x من النظام العشري الى النظام ذو الأساس b والنتج يحتوى على أساس النظام المحول اليه

In[1]:=2^^101101

Out[1]=45

لتحويل العدد $(101101)_2$ من النظام الثنائي الى النظام العشري

In[2]:=BaseForm[45,2]

Out[2]=101101₂

لتحويل العدد 45 من النظام العشري الى النظام الثنائي

In[3]:=16^^a3bf

Out[3]=41919

لتحويل العدد $(a3bf)_{16}$ من النظام السداسى عشري الى النظام العشري

In[4]:=BaseForm[16^^bf3,2]

Out[4]=101111110011₂

لتحويل العدد $(bf3)_{16}$ من النظام السداسى عشري الى النظام الثنائي

In[5]:=BaseForm[16^^bf3,8]

لتحويل العدد $(bf3)_{16}$ من النظام السداسي

Out[5]= 5763₈

عشري الى النظام الثماني

In[6]:=2^^10111.1101

لتحويل العدد الكسري $(10111.1101)_2$ من

Out[6]= 23.8

النظام الثماني الى النظام العشري

In[7]:=BaseForm[N[Sqrt[2]],2]

لتحويل العدد الحقيقي $\sqrt{2}$ من النظام

Out[7]= 1.0110101000001001111₂

العشري الى النظام الثماني

وفي ماتيماتكا يمكن إجراء العمليات الحسابية المعروفة من جمع وطرح وضرب وقسمة على الأعداد في الأنظمة العددية المختلفة .

In[8]:=2^^1101001+2^^101111

حساب مجموع عددين في النظام الثماني

Out[8]=152

والناتج يكون في النظام العشري

In[9]:=BaseForm[2^^1101001+2^^101111,2]

حساب مجموع عددين في النظام الثماني

Out[9]=10011000₂

والناتج يكون في النظام الثماني

In[10]:=BaseForm[2^{11011.1011}-2^{101111.1001},2] حساب حاصل طرح عددين في
Out[10]=-10011.111₂ النظام الثنائي والناتج في النظام الثنائي

In[11]:=BaseForm[8^{36.72}+8^{74.02},8] حساب مجموع عددين في النظام الثماني
Out[11]=132.74₈ والناتج يكون في النظام الثماني

In[12]:=BaseForm[16^{af5.e6}-16^{fe.9ab},16] حساب مجموع عددين في النظام
Out[12]=9f7.4b₁₆ السداسي عشري

In[13]:=2¹⁰¹ 2¹¹⁰ حساب حاصل ضرب عددين في النظام
Out[13]=30 الثنائي والناتج يكون في النظام العشري

In[14]:=BaseForm[2^{11011.101}/2^{110.011},2] حساب خارج قسمة عددين في
Out[14]=100.010101010101011₂ النظام الثنائي

In[15]:=BaseForm[16^{af6.ec4}/16^{ec.fa3},16] حساب خارج قسمة عددين في
Out[15]=b.d83e₁₆ النظام السداسي عشري

٣ . المتغيرات Variables

عند عمل الحسابات في ماتيماتكا يكون من المفيد دائما إعطاء أسماء للقيم العددية أو للكميات الحسابية الناتجة ويتم ذلك بإدخال أسماء متغيرات **variables** لهذه القيم أو للكميات الحسابية .

x=value	لوضع القيمة value داخل المتغير x
x=y=value	لوضع القيمة value لكل من المتغيرات x,y
x=.	لحذف أى قيمة تم إحلالها من قبل للمتغير x

وعند اختيار أسماء للمتغيرات داخل ماتيماتكا يجب مراعاة الآتى :

- فى أسماء المتغيرات لا يوجد أى قيود على عدد الحروف أو الأرقام المستخدمة فى أسم المتغير ويجب عدم استخدام العلامات الخاصة (+ , / , ^ , .) فى أسم المتغير .
- أسم المتغير لا يبدأ بعدد فمثلا $2x$ تمثل حاصل الضرب $2 * x$ بينما $x2$ تمثل أسم المتغير .
- فى ماتيماتكا يمكن استخدام الحروف الكبيرة والصغيرة upper and lower-case letters فى أسماء المتغيرات ولكن يجب ان يبدأ أسم المتغير بحرف ابجدي صغير lower-case letter حتى لا يحدث تداخل بين أسماء المتغيرات التى تقوم بتعريفها وبين أسماء المتغيرات أو الدوال المعرفة داخل بناء ماتيماتكا built-in .
- داخل العمل فى ماتيماتكا فإن أسم المتغير يحتفظ بالقيمة التى يتم إحلالها داخله حتى يقوم المستخدم بتغيرها أو حذفها فمثلا إذا وضعنا $x=5$ فإن ماتيماتكا يفترض انك تريد دائما للمتغير x أن يكون له القيمة 5 داخل الدفتر notebook الذى نتعامل معه ألا إذا قمت بتغيرها أو حذفها .

In[1]:=x=5 لجعل المتغير x له القيمة 5 يكتب x=5
Out[1]=x=5

In[2]:=x^2 وعند ظهور x في أي عملية بعد ذلك
Out[2]=25 سوف تستبدل بالقيمة 5

In[3]:=x=7 عند إعطاء قيمة جديدة للمتغير x فإنه يتم
Out[3]=x=7 إلغاء القيمة السابقة والتعامل مع القيمة الجديدة .

In[4]:=x^2 عند حساب x^2 يتم التعامل مع القيمة
Out[4]=49 الجديدة للمتغير x

In[5]:= x=. يمكن إلغاء القيمة المخزنة في المتغير x
 باستخدام المؤثر .=

In[6]=x وعند الاستعلام عن قيمة x يتم
Out[6]=x طباعة x بدون قيمة

وفي ماتيماتكا يمكن كتابة أكثر من عملية رياضية على سطر واحد بجملة إدخال واحدة بشرط أن يفصل كل عملية عن الأخرى بالفاصلة المنقوطة (;) وفي هذه الحالة فإن ناتج التنفيذ يعطى ناتج آخر عملية تم إدخالها في السطر أما إذا انتهى سطر الإدخال بالفاصلة المنقوطة (;) فهذا يعنى رغبة المستخدم فى عدم ظهور الناتج .

ماتيماتيكا - الرياضيات باستخدام الكمبيوتر

In[7]:=a=2;b=3;c=a+b;d=a b c إدخال أكثر من عملية رياضية على سطر واحد
Out[7]=30 في جملة إدخال واحدة ونلاحظ أن ناتج التنفيذ
يكون ناتج آخر عملية مدخلة في السطر

In[8]:=a=2;b=3;c=a+b;d=a b c في حالة أنها السطر بالفاصلة المنقوطة ; فإنه
لا تظهر جملة الناتج

ونعرض الآن بعض الملاحظات التي يجب مراعاتها عند استخدام المتغيرات في ماتيماتيكا
x y تعني حاصل ضرب المتغير x في المتغير y أي أن وجود مسافة بين
المتغيرين يعني إجراء عملية الضرب

xy تعني متغير له الاسم xy

5x تعني حاصل ضرب 5 في المتغير x أي أنه يمكن الاستغناء عن المسافة
أو علامة الضرب * بين عدد ومتغير بشرط أن يكون العدد أولاً

x5 تعني متغير له الاسم x5

x^2y تعني $x^2 y$ وليس x^{2y}

وفي لغات الحاسب المعروفة مثل لغة الفورتران FORTRAN أو لغة السي C فإنه
يجب على المستخدم الإعلان Declaration عن أسماء المتغيرات قبل استخدامها فمثلاً إذا كتبنا
في برنامج فورتران جملة مثل x=5 وكان المتغير x لم يتم الإعلان عنه في بداية البرنامج فإن

ماثيماتكا - الرياضيات باستخدام الكمبيوتر

مترجم لغة الفورتران يرفض ترجمة البرنامج ويعطى رسالة تفيد بوجود متغير لم يتم الإعلان عنه ، ولكن فى برنامج ماثيماتكا يختلف الوضع تماما حيث لا يطلب ماثيماتكا الإعلان عن المتغيرات التى نستخدمها داخل العمل فى دفتر معين `notebook` وانما يقوم ماثيماتكا بحفظ أسماء المتغيرات التى تدخل اليه مستخدما فى ذلك نظام السياقات `Context` الذى يشبه نظام الفهارس المستخدم فى نظام التشغيل `DOS` وهذا يعنى انه يمكن وضع كل مجموعة من المتغيرات فى سياق معين وهذا النظام يتيح للمستخدم إعادة استخدام أسماء المتغيرات لسي السياقات المختلفة وذلك لان الأسم الكامل لاي متغير هو الأسم الذى نعطيه له بالإضافة الى اسم السياق الذى نضعه فيه وهذا يتيح للمستخدم الحرية والسهولة فى التعامل مع المتغيرات داخل ماثيماتكا دون الإعلان عنها . ومن اهم السياقات فى ماثيماتكا السياق `Global`` وهو السياق الفعال عند تشغيل البرنامج ويضع فيه ماثيماتكا كل المتغيرات التى نقوم بتعريفها ما لم نص على وضعها فى سياق آخر ، والسياق `System`` ويضع فيه ماثيماتكا كل الأوامر والدوال الموجودة فيه `built-in` ، ولكن يجب على المستخدم مراعاة حذف قيسم المتغيرات التى تم الانتهاء من التعامل معها فى سياق معين حتى لا يحدث خطأ فى استخدام قيم لا نريدها للمتغيرات .

وضع القيمة 8 فى المتغير x `In[9]:=x=8;`

للاستعلام عن التعريف الذى يحتفظ به ماثيماتكا للمتغير x ومعرفة السياق الموجود به المتغير x `In[10]:=?x`
`Global`x`
`x=8`

وبالإضافة الى المؤثرات الحسابية توجد المؤثرات العلاقية `Relational Operators` والتى تربط متغيرات أو تعبيرات رياضية ويكون الناتج كمية منطقية صواب `True` أو خطأ `False` .

المؤثر العلاقى	العمل الذى يقوم به المؤثر العلاقى
$x=y$	إحلال قيمة y داخل المتغير x
$x==y$	اختبار ما إذا كان x يساوى y
$x>y$	اختبار ما إذا كان x اكبر من y
$x>=y$	اختبار ما إذا كان x اكبر من أو يساوى y
$x<y$	اختبار ما إذا كان x اقل من y
$x<=y$	اختبار ما إذا كان x اقل من أو يساوى y
$x!=y$	اختبار ما إذا كان x لا تساوى y

In[11]:=x=6;y=8;z=3;x>y-z

Out[11]= True

إحلال القيم 6,8,3 الى المتغيرات x, y, z

على الترتيب ثم اختبار ما إذا كان $x > y - z$

ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية True

In[12]:=x==y

Out[12]= False

اختبار ما إذا كان x اكبر من أو يساوى y

ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية False

كذلك يوجد نوع آخر من المؤثرات هو المؤثرات المنطقية Logical Operations والتي تربط كميات منطقية p, q ويكون الناتج كمية منطقية صواب True أو خطأ False .

المؤثر العلاقي	العمل الذي يقوم به المؤثر العلاقي
$!p$	Not p
$p \&\& q$	p and q
$p \parallel q$	p or q

ومن المعلوم ان جدول الصواب والخطأ للمؤثرات العالقية يكون فى الصورة

p	q	! p	$p \&\& q$	$p \parallel q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

In[13]:= a=4;b=7;c=5;

إحلال القيم 4,7,5 الى المتغيرات a , b , c
على الترتيب

In[14]:=b>=a+c&& a<c

Out[14]= False

اختبار ما إذا كان $b \geq a+c$ and $a < c$
ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية False

In[15]:=b>=a+c || a<c

Out[15]= True

اختبار ما إذا كان $b \geq a+c$ or $a < c$
ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية True

٤ . بعض الدوال الرياضية Some Mathematical Functions

يوجد داخل بناء ماتيماتيكا اكثر من 1000 دالة معرفة الى جانب العديد من الدوال المعرفة في حزم خارجية External Packages وهذه الدوال لها أسماء داخل ماتيماتيكا وفقا للقواعد الآتية :

- يتكون أسم الدالة من الكلمات الإنجليزية الكاملة لأسم الدالة أو الاختصار الرياضى لأسم الدالة .

- الحرف الأول من كل كلمة word في أسم الدالة يكتب كبير Capital وباقى حروف الكلمة يكتب صغير lower-case letter .

- إذا انتهى أسم الدالة بالحرف Q فهذا يعنى ان الدالة تمثل سؤال منطقى وتكون الإجابة صواب True أو خطأ False .

ونتعرف الآن على بعض الدوال العددية الموجودة في ماتيماتيكا ووظيفة كل منها .

الدالة في ماتيماتيكا	الدالة الرياضية
Sqrt[x]	دالة الجذر التربيعي \sqrt{x}
Exp[x]	الدالة الأسية e^x
Log[x]	دالة اللوغاريتم للأساس الطبيعي $\log_e x$
Log[b,x]	دالة اللوغاريتم للأساس b $\log_b x$
Sin[x] , Cos[x] , Tan[x] Csc[x] , Sec[x] , Cot[x]	الدوال المثلثية Trigonometric Functions حيث x مقاسه بالتقدير الدائري
ArcSin[x], ArcCos[x], ArcTan[x] ArcCsc[x] , ArcSec[x] , ArcCot[x]	الدوال المثلثية العكسية Inverse Trigonometric Functions
Sinh[x] , Cosh[x] , Tanh[x] Csch[x] , Sech[x] , Coth[x]	الدوال الزائدية Hyperbolic Functions
ArcSinh[x], ArcCosh[x], ArcTanh[x] ArcCsch[x], ArcSech[x], ArcCoth[x]	الدوال الزائدية العكسية Inverse Hyperbolic Functions
Abs[x]	القيمة المطلقة $ x $
Max[x1,x2,...]	إيجاد أكبر عدد من الأعداد x_1, x_2, \dots
Min[x1,x2,...]	إيجاد أصغر عدد من الأعداد x_1, x_2, \dots

In[1]:=Sqrt[3]/N
Out[1]=1.73205

حساب قيمة عددية للجذر التربيعي $\sqrt{3}$

In[2]:=Exp[2.5]
Out[2]=12.1825

حساب قيمة $e^{2.5}$

In[3]:=Log[2,]
Out[3]=8

حساب قيمة $\log_2 256$

In[4]:=Sin[2]/N
Out[4]=0.909297

حساب قيمة عددية لدالة الجيب $\sin(2)$

In[5]:=ArcCos[.5]
Out[5]=1.0472

حساب قيمة دالة جيب التمام العكسية $\cos^{-1}(.5)$

In[6]:=Sinh[4]/N

حساب قيمة عددية لدالة الجيب الزائدية $\sinh(4)$

Out[6]=27.2899

In[7]:=Abs[-5]

حساب القيمة المطلقة $|-5|$

Out[7]=5

In[8]:=Max[9,4,-6,3,8,12]

حساب العدد الأكبر من قائمة الأعداد

Out[8]=12

{9,4,-6,3,8,12}

In[9]:=Min[9,4,-6,3,8,12]

حساب العدد الأصغر من قائمة الأعداد

Out[9]= -6

{9,4,-6,3,8,12}

وفي ماثيماتكا يوجد بعض الثوابت الرياضية Mathematical Constants لها أسماء معينة

I	$i = \sqrt{-1}$
Infinity	∞
Pi	$\pi \approx 3.14159$
Degree	$\pi / 180$
E	$e \approx 2.71828$
GoldenRatio	$(1 + \sqrt{5}) / 2 \approx 1.61803$

In[10]:=N[Pi^2]

Out[10]= 9.8696

لحساب القيمة العددية للثابت

π مرفوع للأس 2

In[11]:=Sin[Pi/2]

Out[11]=1

لحساب قيمة $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

In[12]:=Cos[60 Degree]/N

Out[12]=0.5

لحساب قيمة $\cos(60^\circ)$

حيث الزاوية مقاسه بالتقدير الستيني

In[13]:=E^2/N

Out[13]=7.3890

لحساب قيمة e^2

الصيغة العامة للدالة في ماتيماتكا	الوظيفة التي تقوم بها الدالة
Round[x]	للحصول على اقرب عدد صحيح من x
Floor[x]	للحصول على اكبر عدد صحيح اقل من أو يساوى x
Ceiling[x]	للحصول على اصغر عدد صحيح اكبر من أو يساوى x.

والجدول الآتي يوضح عمل هذه الدوال عند تطبيقها على بعض الأعداد

X	Round[x]	Floor[x]	Ceiling[x]
2.4	2	2	3
2.5	2	2	3
2.6	3	2	3
-2.4	-2	-3	-2
-2.5	-2	-3	-2
-2.6	-3	-3	-2

الصيغة العامة للدالة في ماتيماتكا	الوظيفة التي تقوم بها الدالة
Mod[m, n]	إيجاد باقى خارج القسمة $\frac{m}{n}$ (m modulo n)
Quotient[m,n]	إيجاد الجزء الصحيح من خارج القسمة $\frac{m}{n}$
GCD[n1,n2,...]	إيجاد القاسم المشترك الأعلى للأعداد n1 , n2 , ...
LCM[n1,n2,...]	إيجاد المضاعف المشترك الأدنى للأعداد n1 , n2 , ...
Divisors[n]	إيجاد قائمة بالأعداد الصحيحة التي تقسم العدد n
Prime[k]	إيجاد العدد الأولي رقم k
PrimeQ[n]	إذا كان العدد n عدد أولي فإن الناتج يكون صواب True وخلاف ذلك يكون الناتج خطأ False

In[14]:=Mod[17,3]

حساب باقى قسمة 17 على 3

Out[14]=2

In[15]:=Quotient[17,3]

حساب الجزء الصحيح من خارج قسمة 17 على 3

Out[15]=5

In[16]:=GCD[12,16,24]

حساب القاسم المشترك الأعلى للأعداد 12 , 16, 24

Out[16]=4

وهو يمثل أكبر عدد صحيح يقسم العددين

In[17]:=LCM[12,16,24]

حساب المضاعف المشترك الأدنى

Out[17]=48

للأعداد 12 , 16 , 24

In[18]:=Divisors[24]

عمل قائمة تحتوى على قواسم

Out[18]={1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

العدد 24

In[19]:=Prime[100]

الحصول على العدد الأولي رقم 100

Out[19]=541

In[20]:=PrimeQ[81]

اختبار ما إذا كان العدد 81 عدد أولي

Out[20]=False

الوظيفة التي تقوم بها الدالة	الصيغة العامة للدالة في ماتيماتكا
حساب دالة مضروب n	$n!$
معامل ذات الحدين $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	Binomial[n, m]
تحديد إشارة x وتكون $+1$ إذا كان $x > 0$ أو 0 إذا كان $x=0$ أو -1 إذا كان $x < 0$	Sign[x]
للحصول على عدد عشوائي محصور بين $0, 1$	Random[]
للحصول على عدد عشوائي من النوع $type$ وفي المدى $range$ ، والنوع $type$ قد يكون حقيقي Real أو صحيح Integer أو مركب Complex والمدى $range$ يكون بالصورة $\{min, max\}$	Random[type, range]
للحصول على عدد عشوائي من النوع $type$ وفي المدى $range$ وبدقة n من الأرقام العشرية	Random[type, range, n]

In[21]:=30!
 Out[21]=265252859812191058636308480000000

حساب قيمة مضروب 30

In[22]:=30!/N
 Out[22]=2.65253 10³²

حساب قيمة عددية تقريبية لمضروب 30

In[23]:=Binomial[8,3]
 Out[23]=56

حساب قيمة معامل ذات الحدين $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!}$

In[24]:=Random[]
 Out[24]=0.440108

للحصول على عدد عشوائي محصور بين 0,1

In[25]:=Random[Integer,{10,50}]
 Out[25]=32

للحصول على عدد صحيح عشوائي

محصور بين 10 , 50

In[26]:=Random[Real,{2.5,20},15]
 Out[26]=7.57929458180578

للحصول على عدد حقيقي عشوائي محصور

بين 2.5 , 20 بدقة 15 رقم عشري

٥ . الأعداد المركبة Complex Numbers

في ماتيماتكا يمكن التعامل مع الأعداد المركبة التي على الصورة $x + Iy$ حيث I يمثل المقدار التخيلي $\sqrt{-1}$ وفيما يأتي نعرض بعض العمليات على الأعداد المركبة

$x + Iy$	العدد المركب $x + iy$
$\text{Re}[z]$	الجزء الحقيقي من العدد المركب z
$\text{Im}[z]$	الجزء التخيلي من العدد المركب z
$\text{Conjugate}[z]$	العدد المرافق للعدد المركب z
$\text{Abs}[z]$	القيمة المطلقة للعدد المركب z
$\text{Arg}[z]$	سعة العدد المركب z حيث $z = z e^{i \arg(z)}$

بعض العمليات على الأعداد المركبة

ماتيماتكا - الرياضيات باستخدام الكمبيوتر

ويقوم ماتيماتكا بأجراء العمليات الجبرية على الأعداد المركبة من جمع وطرح وضرب وقسمة وكذلك يمكن حساب قيمة الجذر التربيعي والدوال الأسية واللوغاريتمية والمتلثة والزائدية فسى حالة الأعداد المركبة .

In[1]:=Sqrt[-4]

حساب الجذر التربيعي للعدد التخيلي -4

Out[1]=2I

والناتج هو العدد التخيلي 2I

In[2]:=Sqrt[3+2I]/N

حساب القيمة العددية للجذر التربيعي

Out[2]= 1.81735 + 0.550251 I

للعدد المركب 3+2I

In[3]:=Exp[2+7I]/N

حساب القيمة العددية للدالة الأسية

Out[3]=5.57063 + 4.85451 I

المركبة e^{2+7I}

In[4]:=Log[-2]

حساب قيمة $\log(-2)$

Out[4]:=I Pi + Log[2]

ونلاحظ أن الناتج يكون عدد مركب

-In[5]:=Log[

ولحساب القيمة العددية للمقدار المركب $\log(-2)$

2]/N

Out[5]=0.693147 + 3.14159 I

In[6]:=Log[3+4I]/N

حساب القيمة العددية للدالة اللوغاريتمية

Out[6]=1.60944 + 0.927295 I

المركبة $\log(3+4I)$

In[7]:=Abs[2+3I]

لحساب القيمة المطلقة للعدد المركب $2 + 3I$

Out[7]= Sqrt[13]

In[8]:=Abs[2+3I]/N

ولحساب القيمة العددية لدالة القيمة

Out[8]=3.60555

المطلقة $|2 + 3 I|$

In[9]:=z1=3+5I;z2=4-6I;

لتعريف الأعداد المركبة $z1, z2$

In[10]:=z1+z2

لحساب مجموع العددين المركبان $z1 + z2$

Out[10]=7 - I

In[11]:=z1 z2

لحساب حاصل ضرب العددين المركبان $z1 \times z2$

Out[11]=42 + 2 I

In[12]:=z1/z2

لحساب خارج قسمة العددين المركبان $\frac{z1}{z2}$

Out[12]= $-\frac{9}{26} + \frac{19}{26} I$

In[13]:=z1/z2/N

لحساب قيمة عددية لخارج قسمة العددين المركبان

Out[13]=-0.346154 + 0.730769 I

In[14]:=Arg[z1]/N

لحساب سعة العدد المركب $z1$

Out[14]=1.03038

الكتاب الثالث
ماتيماتيكيا والجبر



في هذا الكتاب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماتيماتيكيا
والخاصة بالموضوعات الآتية :

١ . كثيرات الحدود والدوال الكسرية Polynomials & Rational Functions

٢ . المتسلسلات Series

٣ . حل المعادلات Solving Equations

٤ . الجبر الخطي Linear Algebra

الاول :	القوائم
الثاني :	المصفوفات
الثالث :	حل الأنظمة الخطية
الرابع :	القيم المميزة والمتجهات المميزة

الباب الثالث

ماثيماتيكما والجبر

من الأشياء الهامة في برنامج ماثيماتيكما هو القدرة على القيام بالحسابات على المقادير الرمزية Symbolic الى جانب المقادير العددية Numeric وهذا يعنى أن ماثيماتيكما يستطيع التعامل مع الصيغ والمقادير الجبرية تماما مثل التعامل مع الأعداد .

١ . كثيرات الحدود والدوال الكسرية Polynomials and Rational Functions

برنامج ماثيماتيكما يقدم عدد كبير من الأوامر للتحويل بين الأشكال المختلفة للتعبيرات الجبرية وأجراء العمليات الجبرية على كثيرات الحدود Polynomials وسوف نتعرف فيما يأتي على بعض هذه الأوامر مع توضيح الوظيفة والصيغة العامة لكل من هذه الأوامر ونعطى أمثلة توضيحية .

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Factor[poly]	تحليل كثيرة الحدود Poly الى قوى صحيحة
Expand[expr]	إيجاد مفكوك حاصل الضرب والقوى الصحيحة الموجبة الموجودة فى البسط للتعبير expr
ExpandAll[expr]	إيجاد مفكوك حاصل الضرب والقوى الصحيحة الموجبة الموجودة فى كل أجزاء التعبير expr
Together[expr]	توحيد المقامات denominators للكسور الموجودة فى التعبير expr
Apart[expr]	كتابة التعبير الكسرى expr على صورة مجموع لكسوره الجزئية
Simplify[expr]	إيجاد صورة مبسطة للتعبير expr بأصغر عدد ممكن من الأجزاء
Collect[expr,x]	تجميع الحدود التى تحتوى على نفس قوى x فى التعبير expr

In[1]:=Factor[x^2+2x-3]

لتحليل كثيرة الحدود $x^2 + 2x - 3$

Out[1]= (x+3)(x-1)

إلى عواملها

In[2]:=Expand[%]

الأمـر Expand هو عكس الأمر Factor

Out[2]= $x^2 + 2x - 3$

ويقوم بفك الأقواس

In[3]:=Factor[8x^3+36x^2+54x+27]

لتحليل كثيرة الحدود

Out[3]= $(3 + 2x)^3$

$8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

إلى عواملها

تعريف المقدار الجبري rrr ثم إيجاد مفكوك القوى الصحيحة الموجبة وكذلك حاصل الضرب الموجود في البسط للمقدار الجبري rrr

In[4]:=rrr=(x-1)^2 (x+2)/((x+1)(x-3)^2);Expand[rrr]

Out[4]= $\frac{2}{(-3+x)^2(1+x)} - \frac{3x}{(-3+x)^2(1+x)} + \frac{x^3}{(-3+x)^2(1+x)}$

In[5]:=Together[%]

توحيد المقامات للكسور الموجودة في المقدار

$$\text{Out[5]: } \frac{2 - 3x + x^3}{(-3 + x)^2(1 + x)}$$

الجبري الناتج من جملة الإخراج السابقة

إيجاد مفكوك القوى الصحيحة الموجبة وكذلك حاصل الضرب الموجود في كل المقدار الجبري rrr

In[6]:=ExpandAll[rrr]

$$\text{Out[6]= } \frac{2}{9+3x-5x^2+x^3} - \frac{3x}{9+3x-5x^2+x^3} + \frac{x^3}{9+3x-5x^2+x^3}$$

In[7]:=Apart[rrr]

كتابة المقدار الجبري rrr في صورة

$$\text{Out[7]= } 1 + \frac{5}{(-3+x)^2} + \frac{19}{4(-3+x)} + \frac{1}{4(1+x)}$$

كسوره الجزئية

In[8]:=Simplify[%7]

تبسيط شكل الناتج من جملة الإخراج

$$\text{Out[8]= } \frac{(-1+x)^2(2+x)}{9+3x-5x^2+x^3}$$

السابقة Out[7]

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
Collect[expr, x]	تجميع الحدود التي تحتوي على نفس قوى x في التعبير $expr$
Coefficient[expr, form]	الحصول على معامل $form$ في كثيرة الحدود $expr$
Length[expr]	الحصول على عدد العناصر الموجودة في التعبير $expr$
Exponent[expr, form]	الحصول على أكبر قوى للمقدار $form$ في التعبير $expr$

In[9]:=r1=Expand[(2x+y+1)^2] إيجاد مفكوك المقدار الجبري $(2x + y + 1)^2$
Out[9]= 1 + 4 x + 4 x² + 2 y + 4 x y + y² ووضع الناتج في المتغير $r1$

In[10]:=Collect[r1,y] تجميع الحدود التي تحتوي على نفس قوى المتغير y في التعبير الجبري $r1$
Out[10]= 1 + 4 x + 4 x² + (2 + 4 x) y + y²

In[11]:=Coefficient[r1,y] للحصول على معامل y في التعبير الجبري $r1$
Out[11]=2 + 4 x

In[12]:=Exponent[r1,y] للحصول على أكبر قوى للمتغير y في التعبير الجبري $r1$
Out[12]=2

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Numerator[expr]	الحصول على البسط فى التعبير expr
Denominator[expr]	الحصول على المقام فى التعبير expr
PolynomialQuotient[p, q, x]	إيجاد خارج قسمة p على q مع إهمال الجزء الباقي حيث p, q كثيرات حدود فى المتغير x
PolynomialRemainder[p, q, x]	إيجاد الجزء الباقي من خارج قسمة p على q حيث p, q كثيرات حدود فى المتغير x

In[13]:=Numerator[rrr] للحصول على البسط فى التعبير الجبرى **rrr**

Out[13]=(-1+x)² (2+x)

In[14]:=Denominator[rrr] للحصول على المقام فى التعبير الجبرى **rrr**

Out[14]=(-3+x)² (1+x)

In[15]:= p=x³+5x²+4x-6;q=x+1; تعريف كثيرتى حدود **p, q** ثم

PolynomialQuotient[p,q,x] إيجاد خارج قسمة كثيرة الحدود **p** على

Out[15]=4x² +x كثيرة الحدود **q** مع إهمال الجزء الباقي

In[16]:=PolynomialRemainder[p,q,x] للحصول على الجزء الباقي من خارج قسمة

Out[16]= -6 كثيرة الحدود **p** على كثيرة الحدود **q**

٢ . المتسلسلات Series

في كثير من المسائل الرياضية تنشأ عمليات جمع وضرب للحدود المنتظمة وبرنامج ماتيماتكا قادر على حساب مثل هذه العمليات . وحساب مجموع حدود المتسلسلة يستخدم الأمر Sum كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
Sum[f, {i, imax}]	حساب المجموع $\sum_{i=1}^{i \max} f$
Sum[f, {i, imin, imax}]	حساب المجموع $\sum_{i=i \min}^{i \max} f$
Sum[f, {i, imin, imax, step}]	حساب المجموع $\sum_i f$ من $i=i \min$ الى $i=i \max$ بخطوة مقدارها step
Sum[f, {i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...]	حساب المجموع $\sum_{i=i \min}^{i \max} \sum_{j=j \min}^{j \max} f$

In[1]:= Sum[1/i^2,{i,1,10}]/N

حساب مجموع العشرة حدود الأولى

Out[1]=1.54977

من المتسلسلة $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i^2}$

In[2]:= Sum[i/I^2,{i,1,Infinity}]/N
Out[2]= 1.64493

ويمكن حساب مجموع عدد لانهائي من
المتسلسلة بشرط أن تكون المتسلسلة تقاربية

In[3]:=Sum[x^i/i!,{i,1,7,2}]

لحساب المجموع $\sum_{i=1}^7 \frac{x^i}{i!}$

Out[3]= $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040}$

In[4]:=Sum[x^i/i!,{i,1,7,2}]

لحساب مجموع $\sum_{i=2}^7 \frac{x^i}{i!}$ من $i=2$ الى $i=7$

Out[4]= $x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040}$

بخطوة 2=step

In[5]:=Sum[x^i y^j,{i,1,3},{j,1,i}]

لحساب المجموع المزدوج $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^i x^i y^j$

Out[5]= $xy + x^2y + x^2y^2 + x^3y + x^3y^2 + x^3y^3$

ويمكن لماتيماتيكا إجراء عمليات الضرب على الحدود المنتظمة باستخدام الأمر **Product** كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
Product[f,{i,imax}]	حساب حاصل الضرب $\prod_{i=1}^{imax} f$
Product[f,{i,imin,imax}]	حساب حاصل الضرب $\prod_{i=imin}^{imax} f$
Product[f,{i,imin,imax,step}]	حساب حاصل الضرب $\prod_{i=imin}^{imax} f$ بخطوة مقدارها step
Product[f,{i,imin,imax}, {j,jmin,jmax},...]	حساب حاصل الضرب المزدوج $\prod_{i=imin}^{imax} \prod_{j=jmin}^{jmax} f$

In[6]:=Product[i^2,{i,1,5}]

حساب حاصل الضرب $\prod_{i=1}^5 i^2$

Out[6]=14400

In[7]:=Product[x+i,{i,1,4}]

حساب حاصل الضرب $\prod_{i=1}^4 (x+i)$

Out[7]=(1+x)(2+x)(3+x)(4+x)

In[8]:=Product[(x+i)^j,{i,1,3},{j,1,i}]

حساب حاصل $\prod_{i=1}^3 \prod_{j=1}^i (x+i)^j$

Out[8]=(1+x)(2+x)^3(3+x)^6

وبرنامج ماتيماتكا قادر على حساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة $f(x)$ حول النقطة $x = x_0$ لأي عدد n من الحدود وكذلك حساب مفكوك تيلور لدالة في متغيرين $f(x,y)$ حول النقطة (x_0, y_0) وذلك باستخدام الأمر **Series** كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
Series[f, {x, x0, n}]	حساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة f حول النقطة x_0 حتى الحد $(x-x_0)^n$
Series[f, {x, x0, nx}, {y, y0, ny}]	حساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة f على التابع بالنسبة إلى y ثم إلى x
Normal[expr]	تحويل expr إلى الشكل العادي بدون أي رموز خاصة

لحساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة $f(x)$ حول النقطة $x=a$ حتى الحدود من الدرجة الثالثة

In[9]:=Series[f[x],{x,a,3}]

Out[9]=

$$f[a] + f'[a](-a+x) + \frac{f''[a](-a+x)^2}{2} + \frac{f^{(3)}[a](-a+x)^3}{6} + O[-a+x]^4$$

لحساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة e^x حول النقطة $x = 0$ حتى الحدود من الدرجة الرابعة

In[10]:=Series[Exp[x],{x,0,4}]

$$\text{Out[10]}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+O[x]^5$$

ويمكن إلغاء الحد $O[x]^5$ وكتابة المفكوك في الشكل العادى وذلك باستخدام الأمر Normal

In[11]:=Normal[%]

$$\text{Out[11]}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$$

لحساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة e^{xy} حول النقطة $x = 0$, $y = 0$ حتى الحدود من الدرجة الثالثة فى x والدرجة الثانية فى y

In[12]:=Series[Exp[x y],{x,0,3},{y,0,2}]

$$\text{Out[12]}=1+(y+O[y]^3)x+(\frac{y^2}{2}+O[y]^3)x^2+O[x]^3$$

ويمكن كتابة المفكوك في الشكل العادى وذلك باستخدام الأمر Normal

In[13]:=Normal[Series[Exp[x y],{x,0,3},{y,0,2}]]

$$\text{Out[13]}=1+xy+\frac{x^2y^2}{2}$$

٣ . حل المعادلات Solving Equations

فى برنامج ماثياتيكا المعادلة يكون لها الشكل $lhs == rhs$ حيث يستخدم المؤشر العلاقى $==$ وهو يعنى اختبار ما إذا كان الطرف الأيمن rhs يساوى الطرف الأيسر lhs ولذلك فإن المعادلات فى ماثياتيكا تعامل على أنها تعبيرات منطقية Logical Statement .

فمثلا عند إدخال المعادلة $2+3==5$ فإن الناتج يكون صواب True

In[1] := 2+3==5

Out[1]= True

وعند إدخال المعادلة $x^2+3x==2$ فإن ماثياتيكا يقوم بإخراج المعادلة فى صورة رمزية لأنه لم يستطع اختبار ما إذا كان $x^2+3x==2$ صواب أو خطأ نظرا لعدم وجود قيمة سابقة للمتغير x .

In[2] := x^2+3x==2

Out[2]= $x^2+3x==2$

والآن لحل المعادلة والحصول على قيم x التى تمثل جذور المعادلة نستخدم الأمر Roots كالآتى :

Roots[$lhs==rhs$,var]

للحصول على قائمة تحتوي على جذور المعادلة

، $lhs==rhs$ بالنسبة للمتغير var .

الحصول على جذور المعادلة $x^2+3x=2$ ونلاحظ أن الناتج يكون على صورة تعبير منطقي

In[3]:=Roots[x^2+3x==2,x]

Out[3]=

$$x = \frac{-3 - \text{Sqrt}[17]}{2} \quad \parallel \quad x = \frac{-3 + \text{Sqrt}[17]}{2}$$

وكثيرا ما نحتاج الى استخدام الحل الناتج في حسابات أخرى لذلك يكون من المفيد تحويل الحاصل

من التعبير المنطقي الى صورة صريحة ويتم ذلك باستخدام الدالة **ToRules**

ToRules[eqns] لتحويل حل eqns الناتج من الأمر **Roots** من الصورة المنطقية الى متتابعة من القوائم تحتوي على قواعد صريحة للحل

{ToRules[eqns]} لتحويل حل eqns الناتج من الأمر **Roots** من الصورة المنطقية الى قائمة تحتوي على قواعد صريحة للحل

In[4]:=ToRules[%3]

لتحويل الحل الناتج من جملة 3

Out[4]=

الى متتابعة تحتوي على قواعد صريحة للحل

$$\text{Sequence}\left\{\left\{x \rightarrow \frac{-3 - \text{Sqrt}[17]}{2}\right\}, \left\{x \rightarrow \frac{-3 + \text{Sqrt}[17]}{2}\right\}\right\}$$

In[5]:={ToRules[Roots[x^2+3x==2,x]]//N لتحويل الكسور الاعتيادية في الحل

Out[5]={x -> -3.56155}, {x -> 0.561553} الى كسور عشرية والحصول على قيم

عددية نستخدم الدالة **N**

ويمكن حل المعادلة والحصول على جذورها باستخدام الأمر **Solve** كالاتي :

Solve[eqn, var] **var** بالنسبة للمتغير **eqn** لحل المعادلة

وتعتبر معادلات كثيرات الحدود **polynomial equations** من أهم المعادلات التي يتم حلها باستخدام الأمر **Solve**.

للحصول على جذور المعادلة $x^2 + 3x = 2$ بالنسبة للمتغير **x**

In[6]:=Solve[x^2+3x==2,x]

Out[6]= $\{x \rightarrow \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}, \{x \rightarrow \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}\}$

لحساب قيمة عددية تقريبية للحل الناتج من جملة الإدخال رقم 6

In[7]:=N[%6]

Out[7]= $\{\{x \rightarrow -3.56155\}, \{x \rightarrow 0.561553\}\}$

للحصول على جذور المعادلة $ax + b = c$ بالنسبة للمتغير **x**

In[8]:=Solve[a x+b==c,x]

Out[8]= $\{\{x \rightarrow -(\frac{b-c}{a})\}\}$

للحصول على جذور المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ بالنسبة الى المتغير x

In[9]:=Solve[a x^2+b x+c==0,x]

$$\text{Out[9]} = \left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{-b - \text{Sqrt}[b^2 - 4ac]}{2a} \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{-b + \text{Sqrt}[b^2 - 4ac]}{2a} \right\} \right\}$$

للحصول على جذور المعادلة $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$ بالنسبة الى المتغير x

In[10]:=Solve[x^3+3x^2+3x+2==0,x]

$$\text{Out[10]} = \{ \{x \rightarrow -2\}, \{x \rightarrow \frac{-1 - \text{ISqrt}[3]}{2}\}, \{x \rightarrow \frac{-1 + \text{ISqrt}[3]}{2}\} \}$$

ولحساب قيمة عددية تقريبية للحل الناتج من جملة الإدخال رقم 10

In[11]:=N[%]

$$\text{Out[11]} = \{ \{x \rightarrow -2.\}, \{x \rightarrow -0.5 - 0.866025 \text{ I}\}, \{x \rightarrow -0.5 + 0.866025 \text{ I}\} \}$$

ويمكن الحصول على جذور معينة من حل المعادلة باستخدام الأقواس المزدوجة [[]]

In[12]:=Solve[x^3+3x^2+3x+2==0,x][[1]] للحصول على الجذر الأول من حل

$$\text{Out[12]} = \{x \rightarrow -2\} \quad x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ المعادلة}$$

In[13]:=Solve[x^3+3x^2+3x+2==0,x][[2]]/N للحصول على قيمة عددية للجذر

$$\text{Out[13]} = \{x \rightarrow -0.5 - 0.866025 \text{ I}\} \quad x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ المعادلة الثاني من حل}$$

والأمر **Solve** قادر على إيجاد حلول جبرية صريحة للعديد من معادلات كثيرات الحدود ذات الدرجات العالية خاصة المعادلات التي يمكن تحليلها

In[14]:=equ1=Expand[Product[x-i,{i,5}]] تعريف كثيرة حدود من الدرجة الخامسة
Out[14]=-120 + 274 x - 225 x² + 85 x³ - 15 x⁴ + x⁵

In[15]:=Solve[equ1==0,x] حل معادلة كثيرة حدود من الدرجة الخامسة
Out[15]={{x -> 1}, {x -> 2}, {x -> 3}, {x -> 4}, {x -> 5}}

نلاحظ أننا حصلنا على حل صريح لمعادلة كثيرة الحدود equ1=0 من الدرجة الخامسة .
 وإذا كان ماتيماتيكا قادر على إيجاد حلول معادلة كثيرة حدود من درجة n فإنه يعطى n من الجذور حتى في حالة وجود جذور مكررة كما في المثال الآتي :

In[16]:=Solve[(x+3)(x-1)^2==0,x]
Out[16]={{x -> -3}, {x -> 1}, {x -> 1}}

وفي حالة عدم استطاعة ماتيماتيكا الحصول على حلول جبرية صريحة فإن ماتيماتيكا تترك المعادلة في صورتها الرمزية ويمكن في هذه الحالة استخدام الدالة N للحصول على حلول عددية

In[17]:=Solve[x^5-130x+11==0,x]
Out[17]={ToRules[Roots[-130 x + x⁵ == -11, x]]}

In[18]:= Solve[x^5-130x+11==0,x]/N
Out[18]={{x -> -3.39748}, {x -> -0.0211456 - 3.37698 I},
 {x -> -0.0211456 + 3.37698 I}, {x -> 0.0846154}, {x -> 3.35515}}

وفي ماتيماتكا يمكن استخدام الأمر Solve لحل بعض المعادلات التي ليست على صورة كثيرات حدود

In[19]:=Solve[Sqrt[1-x]+Sqrt[1+x]==4,x]/N
Out[19]={{x -> -6.9282 I}, {x -> 6.9282 I}}

وفي برنامج ماتيماتكا يمكن استخدام الأمر Solve لحل مجموعة من المعادلات في وقت واحد كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
Solve[eqns]	حل مجموعة المعادلات eqns بالنسبة الى جميع المتغيرات الموجودة فيها حيث eqns تكتب في صورة قائمة $\{lhs1==rhs1, lhs2==rhs2, \dots\}$
Solve[eqns, vars]	حل مجموعة المعادلات eqns بالنسبة الى المتغيرات vars حيث vars تكتب في صورة قائمة $\{x1, x2, \dots\}$
Solve[eqns, vars, elims]	حل مجموعة المعادلات eqns بالنسبة الى المتغيرات vars فقط وحذف المتغيرات elims من النتائج

In[20]:=Solve[{x+y==1,x-3y==2}]
Out[20]= {{x -> $\frac{5}{4}$, y -> $-\frac{1}{4}$ }}
الحل المعادلتين بالنسبة الى جميع المتغيرات
الموجودة وهي x, y

In[21]:=Solve[{x^2+y^2==5,x+3y==1}]/N
Out[21]={{x -> -2., y -> 1.}, {x -> 2.2, y -> -0.4}}
للحصول على قيمة عددية لحل
المعادلتين بالنسبة إلى جميع المتغيرات

تعريف القائمة eqns1 وتحتوى على معادلتين فى ثلاث مجاهيل هم x, y, z ثم حساب الحل بالنسبة الى x, y فقط

In[22]:=eqns1={y-2x==9,x+3z==1}; Solve[eqns1,{x,y}]

Out[22]={{y -> 9 - 2 (-1 + 3 z), x -> 1 - 3 z}}

حساب حل مجموعة المعادلات eqns1 بالنسبة الى y, z فقط

In[23]:=Solve[eqns1,{y,z}]

Out[23]={{y -> 9 + 2 x, z -> $\frac{1-x}{3}$ }}

تعريف القائمة eqns2 وتحتوى على ثلاث معادلات فى خمسة مجاهيل هم x, y, z, w, t ثم حساب الحل بالنسبة الى المتغيرات x, y, z فقط

In[24]:=eqns2={x+2y==z,y+2z==w,z+2w==t};

Solve[eqns2,{x,y,z}]

Out[24]={{x -> t - 2 w + 2 (-w - 2 (-t + 2 w)),
y -> w + 2 (-t + 2 w), z -> t - 2 w}}

In[25]:=Solve[eqns1,{x},{z}]

حساب حل مجموعة المعادلات eqns1

Out[25]={{x -> $\frac{-9+y}{2}$ }}

بالنسبة الى المتغير x مع حذف المتغير z

In[26]:=Solve[eqns1,{y},{z}]

حساب حل مجموعة eqns1

Out[26]={{y -> 9 + 2 x}}

بالنسبة إلى المتغير y مع حذف المتغير z

In[27]:=Solve[eqns2,{x},{t,w}] حساب حل مجموعة المعادلات eqns2

Out[27]={x -> -2 y + z} بالنسبة إلى المتغير x مع حذف المتغيرات t,w

In[28]:=Solve[eqns2,{w},{x,y}] حساب حل مجموعة المعادلات eqns2

Out[28]= {{w-> $\frac{t-z}{2}$ }} بالنسبة إلى المتغير w مع حذف المتغيرات x,y

وفي برنامج ماتيماتيكا يمكن حذف عدد من المتغيرات من مجموعة المعادلات وإعادة كتابتها ويتم ذلك باستخدام الأمر Eliminate كالآتي :

Eliminate[eqns,elims] لحذف المتغيرات elims من مجموعة المعادلات eqns

In[29]:=Eliminate[eqns1,x] لحذف المتغير x من مجموعة المعادلات eqns1

Out[29]=y == 11 - 6 z

In[30]:=Eliminate[eqns1,z] لحذف المتغير z من مجموعة المعادلات eqns1

Out[30]=y == 9 + 2 x

In[31]:= Eliminate[eqns2,{x,y}] لحذف المتغيرات x,y من مجموعة المعادلات eqns2

Out[31]=t == 2 w + z

In[32]:=Eliminate[eqns2,{w,t}] لحذف المتغيرات w,t من مجموعة المعادلات eqns2

Out[32]=x == -2 y + z



٤ . الجبر الخطي Linear Algebra

يعتبر الجبر الخطي جزء اساسى وهام فى دراسة الرياضيات والهندسة والفيزياء وعلوم أخرى ، وبرنامج ماتيماتيكا يقدم العديد من الأوامر للعمليات الجبرية الخاصة بالتعامل مع القوائم Lists والمصفوفات Matrices وحلول الأنظمة الخطية Linear Systems وحساب القيم المميزة والمتجهات المميزة لمصفوفة .

أولا : القوائم Lists

من خلال دراستنا للعديد من الأوامر فى ماتيماتيكا مثل

Sum , Product , Series , ...

نلاحظ أن نطاق العمل فى هذه الأوامر يكتب باستخدام الأقواس { } على صورة قائمة List وتستخدم القوائم فى ماتيماتيكا بشكل كبير وبصفة خاصة عند عمل الحسابات عندما يكون هناك حاجة لتنظيم عدد كبير من القيم بغرض التعامل معها كوحدة واحدة ولذلك فسيان ماتيماتيكا غنى بالعمليات التى يمكن تنفيذها على القوائم ، ولكى نتعرف على هذه العمليات لبدأ بتعريف قائمتين s1 , s2 كل قائمة تحتوى على خمسة عناصر

In[1]:=s1={ a , b , c , d , e }; s2={ 2 , 3 , 4 , 5 , 6};

وتنفذ العمليات الحسابية من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة على قائمتين يتم على العناصر المتناظرة فى القائمتين بشرط أن يكون القائمتين بهما نفس العدد من العناصر ونتائج العملية الحسابية يكون قائمة جديدة .

In[2]:= s1+s2

جمع القائمتين s1 , s2 يتم بجمع

Out[2]={2 + a , 3 + b , 4 + c , 5 + d , 6 + e}

العناصر المتناظرة فى القائمتين

In[3]:= s1-s2 طرح القائمتين s1 , s2 يتم بطرح

Out[3]={-2 + a, -3 + b, -4 + c, -5 + d, -6 + e} العناصر المتناظرة في القائمتين

In[4]:=s1 s2 ضرب القائمتين s1 , s2 يتم بضرب

Out[4]={2 a, 3 b, 4 c, 5 d, 6 e} العناصر المتناظرة في القائمتين

In[5]:=s1/ s2 قسمة القائمتين s1 , s2 يتم بقسمة

Out[5]= { $\frac{a}{2}, \frac{b}{3}, \frac{c}{4}, \frac{d}{5}, \frac{e}{6}$ } العناصر المتناظرة في القائمتين

In[6]:= s1+2 ويمكن إجراء أي عملية حسابية بين قائمة

Out[6]: {a+2 , b+2 , c+2 , d+2 , e+2} وعدد ثابت فمثلا جمع القائمة s1 على العدد

الثابت 2 يتم بإضافة العدد الثابت 2 الى

كل عنصر في القائمة

In[7]:=3s1 ضرب القائمة s1 في العدد الثابت 3 يتم بضرب

Out[7]= {3 a, 3 b, 3 c, 3 d, 3 e} العدد الثابت 3 في كل عنصر من القائمة

In[8]:=s2^2 ويمكن رفع القائمة الى أس عددي حيث يتم رفع

Out[8]={4,9,16,25,36} كل عنصر في القائمة الى هذا الأس العددي

ويمكن رفع أي قيمة عددية الى أس عبارة عن قائمة

In[9]:= 2^s1

Out[9]= { 2^a, 2^b, 2^c, 2^d, 2^e }

ويمكن رفع قائمة الى أس عبارة عن قائمة أخرى

In[10]:= s1^s2

حيث يتم رفع كل عنصر في القائمة الأساس الى أس يساوى العنصر المناظر له في القائمة الأس

Out[10]= { a², b³, c⁴, d⁵, e⁶ }

ويمكن تطبيق الدوال على القوائم حيث يتم تطبيق الدالة على كل عنصر في القائمة

إيجاد الجذر التربيعي للقائمة s2 حيث يتم حساب الجذر التربيعي لكل عنصر في القائمة

In[11]:= Sqrt[s2]/N

Out[11]= { 1.41421, 1.73205, 2., 2.23607, 2.44949 }

تطبيق دالة الجيب sin على القائمة s2

In[12]:= Sin[s2]/N

Out[12]= { 0.909297, 0.14112, -0.756802, -0.958924, -0.279415 }

وماتيماتكا قادر على إجراء عمليات الفئات Sets على القوائم من خلال العديد من الأوامر والجدول الآتي يوضح بعض الأوامر المستخدمة .

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
Length[list]	إيجاد عدد العناصر في القائمة list
Sort[list]	ترتيب عناصر القائمة list حيث يتم أولاً ترتيب الأعداد تصاعدياً ثم ترتيب الحروف أبجدياً
Join[list1, list2, ...]	إضافة القوائم list1, list2, ... على بعضها بحيث تحتوى القائمة الناتجة على عدد من العناصر يساوى مجموع أعداد العناصر في كل قائمة
Union[list1, list2, ...]	اتحاد الفئات $list1 \cup list2 \cup list3 \cup \dots$ حيث يتم حذف العناصر المكررة في القوائم
Intersection[list1, list2, ...]	تقاطع الفئات $list1 \cap list2 \cap list3 \cap \dots$
Complement[eall, e1, e2, ...]	إيجاد مكمل الفئة eall بالنسبة للفئات e1, e2, أي إيجاد العناصر في الفئة eall والغير موجودة في الفئات e1, e2, ...
Partition[list, n]	تجزئ القائمة list الى قوائم فرعية متباعدة كل منها يحتوى على n من العناصر

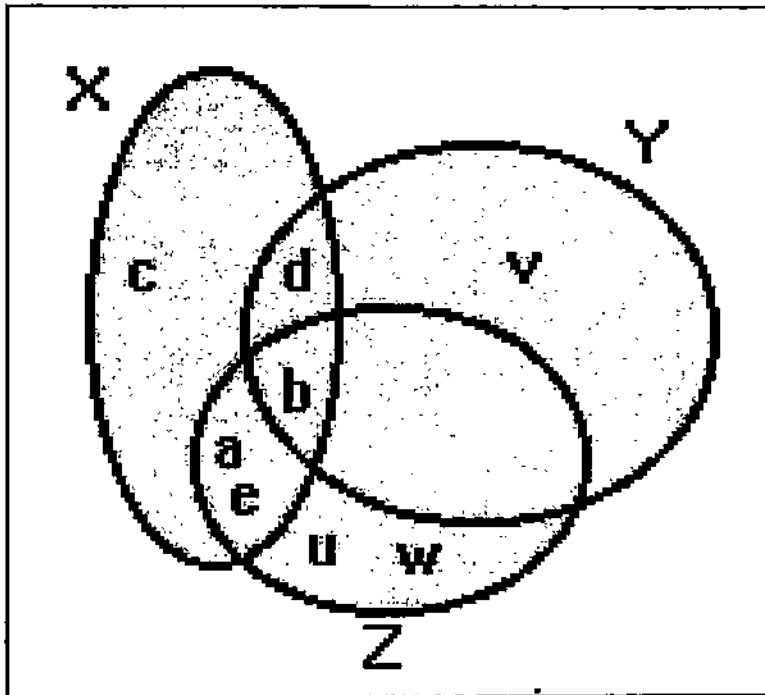
ولتوضيح أوامر الفئات نفرض القوائم X, Y, Z

In[13]: $X=\{a,b,c,d,e\}; Y=\{b,d,v\}; Z=\{a,b,e,u,w\};$

In[14]: $\text{Length}[X]$

لمعرفة عدد العناصر في X

Out[14]: 5



إضافة القوائم X, Y, Z معا بحيث تحتوى القائمة الناتجة على عدد

من العناصر يساوى مجموع أعداد العناصر فى كل قائمة

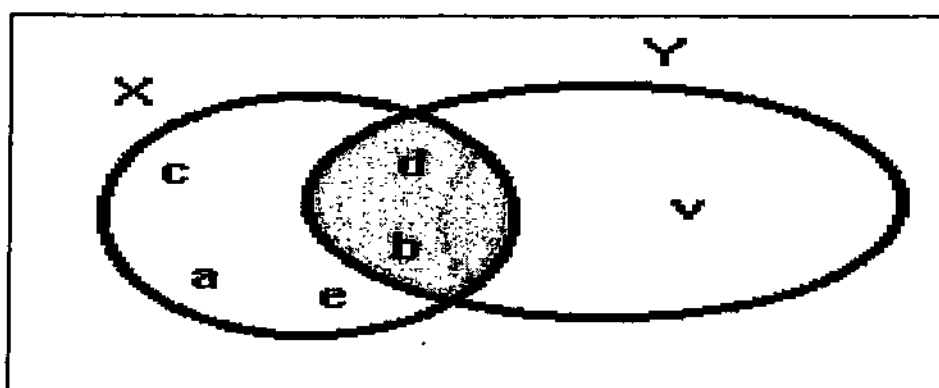
In[15]: $\text{Join}[X,Y,Z]$

Out[15]: $\{a, b, c, d, e, b, d, v, a, b, e, u, w\}$

اتحاد الفئات $X \cup Y \cup Z$ حيث يتم حذف العناصر المكررة فى القوائم

In[16]: $\text{Union}[X,Y,Z]$

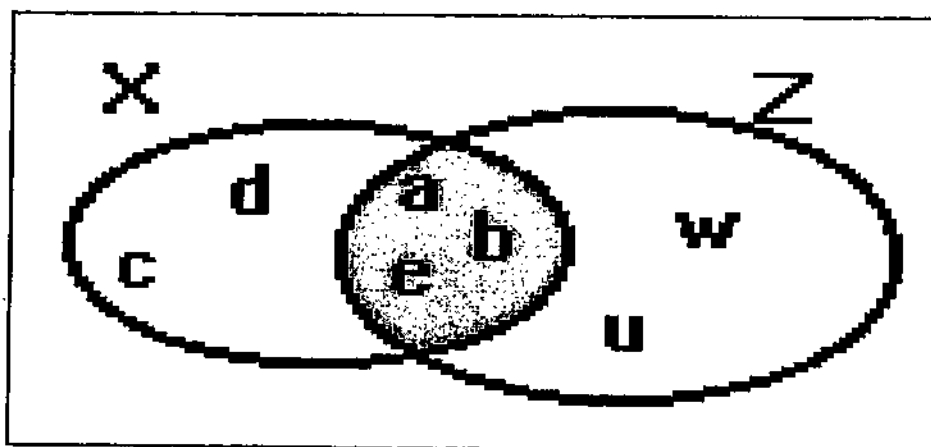
Out[16]: $\{a, b, c, d, e, u, v, w\}$



تقاطع الفتان $X \cap Y$ وتمثل فئة العناصر المشتركة في الفتان X , Y

In[17]:=Intersection[X,Y]

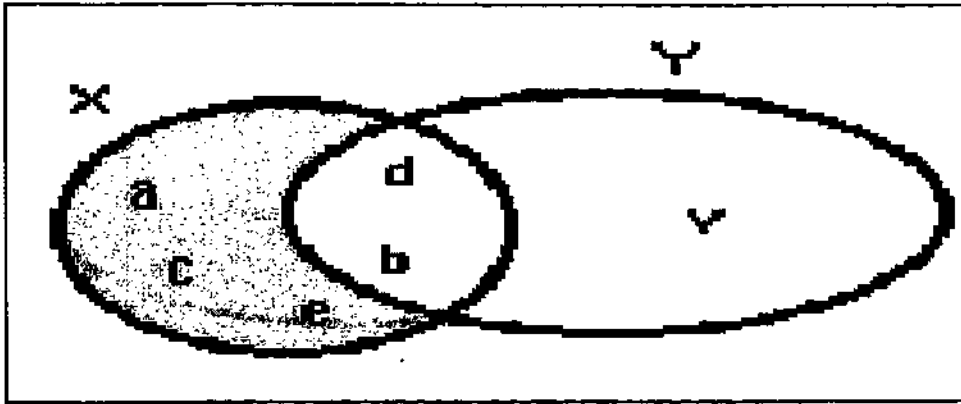
Out[17]={b, d}



تقاطع الفتان $X \cap Z$ وتمثل فئة العناصر المشتركة في الفتان X , Z

In[18]:=Intersection[X,Z]

Out[18]={a, b, e}



إيجاد مكملة الفئة X بالنسبة للفئة Y أي إيجاد العناصر في الفئة X والغير موجودة في الفئة Y

In[19]:=Complement[X,Y]

Out[19]={a, c, e}

In[20]:=Partition[Z,2]

Out[20]={{a, b}, {e, u}}

تجزئ الفئة Z الى قوائم فرعية كل
منها يحتوى على عنصرين

In[21]:=Partition[Y,1]

Out[21]={{b}, {d}, {v}}

تجزئ الفئة Y الى قوائم فرعية كل
منها يحتوى على عنصر واحد فقط

In[22]:=Sort[{r,4,9,p,e,a,-7}]

Out[22]={-7, 4, 9, a, e, p, r}

ترتيب عناصر القائمة حيث يتم أولا
ترتيب الأعداد تصاعديا ثم ترتيب
الحروف أبجديا

ويمكن إضافة عناصر جديدة الى القوائم باستخدام الأوامر الآتية :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
Prepend[list, elem]	إضافة العنصر elem في بداية القائمة list
Append[list, elem]	إضافة العنصر elem في نهاية القائمة list
Insert[list, elem, n]	إضافة العنصر elem الى القائمة list في الموضع رقم n

In[23]:=rrr={a,b,c,d,e};

تعريف القائمة **rrr**

In[24]:=Prepend[rrr,x]

إضافة العنصر **x** في بداية القائمة **rrr**

Out[24]={x, a, b, c, d, e}

In[25]:=Append[rrr,y]

إضافة العنصر **y** إلى نهاية القائمة **rrr**

Out[25]={a, b, c, d, e, y}

In[26]:=Insert[rrr,z,2]

إدخال العنصر **z** في الموضع رقم 2 من القائمة **rrr**

Out[26]={a, z, b, c, d, e}

ويمكن حذف عناصر من القوائم باستخدام الأمر Drop كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
Drop[list, n]	حذف n من العناصر من بداية القائمة list
Drop[list, -n]	حذف n من العناصر من نهاية القائمة list
Drop[list,{n}]	حذف العنصر رقم n من القائمة list
Drop[list, {m, n}]	حذف عناصر من القائمة list ابتداء من العنصر رقم m الى العنصر رقم n

حذف ثلاثة عناصر من بداية القائمة rl **In[27]:=r1={a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7};**

Drop[r1,3]

Out[27]={a4, a5, a6, a7}

حذف عنصران من نهاية القائمة rl **In[28]:=Drop[r1,-2]**

Out[28]={a1, a2, a3, a4, a5}

حذف العنصر الرابع من القائمة rl **In[29]:=Drop[r1,{4}]**

Out[29]={a1, a2, a3, a5, a6, a7}

حذف العناصر من العنصر الثالث الى **In[30]:=Drop[r1,{3,6}]**

العنصر السادس من القائمة rl **Out[30]={a1, a2, a7}**

ويمكن تحديد عناصر معينة من القائمة وذلك باستخدام الأقواس المزدوجة `[[]]`

`In[31]:=r1[[4]]` لتحديد العنصر الرابع من القائمة `r1`
`Out[31]=a4`

`In[32]:=r1[[{4,6}]]` لتحديد العنصران الرابع والسادس من القائمة `r1`
`Out[32]={a4, a6}`

وفي برنامج ماتيماتكا يمكن توليد قوائم بناء على مواصفات نحددها له وذلك باستخدام الأمر `Table` كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
<code>Table[expr, {imax}]</code>	عمل قائمة تحتوي على نسخ من <code>expr</code> عددها <code>imax</code>
<code>Table[expr, {i, imax}]</code>	عمل قائمة تحتوي على قيم <code>expr</code> ابتداء من <code>i=1</code> حتى <code>i=imax</code>
<code>Table[expr, {i, imin, imax}]</code>	عمل قائمة تحتوي على قيم <code>expr</code> ابتداء من <code>i=imin</code> حتى <code>i=imax</code>
<code>Table[expr, {i, imin, imax, di}]</code>	عمل قائمة تحتوي على قيم <code>expr</code> ابتداء من <code>i=imin</code> حتى <code>i=imax</code> بخطوة <code>di</code> مقدارها <code>di</code>
<code>Table[expr, {i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...]</code>	عمل جدول من القوائم يحتوي على قيم <code>expr</code> في أكثر من بعد <code>i, j, ...</code>
<code>TableForm[list]</code>	كتابة القائمة <code>list</code> في الشكل التقليدي للمصفوفة

ولتوضيح عمل الأمر *Table* نعطى الأمثلة الآتية :

In[33]:=Table[x,{4}] لتوليد قائمة تحتوي على أربعة نسخ من الرمز x
Out[33]= {x, x, x, x}

In[34]:=Table[Random[],5] لتوليد قائمة تحتوي على خمسة أعداد عشوائية في الفترة [0,1]
Out[34]= {0.803812, 0.152706, 0.0624843, 0.59723, 0.192153}

In[35]:=Table[i^2,{i,7}] لتوليد قائمة تحتوي على قيم i^2 من $i=1$ الى $i=7$
Out[35]= {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49}

In[36]:=Table[x^i + 2i x,{i,3,6}] لتوليد قائمة تحتوي على المقدار الجبري $x^i + 2i x$ من $i=3$ الى $i=6$
Out[36]= {6 x + x^3, 8 x + x^4, 10 x + x^5, 12 x + x^6}

In[37]:=Table[i^3,{i,2,8,2}] لتوليد قائمة عناصرها هي مكعبات الأعداد الزوجية المحصورة بين 2, 8
Out[37]= {8, 64, 216, 512}

In[38]:=m=Table[i^2+2j,{i,3},{j,2,5}] لتوليد قائمة m تحتوي على قيم $i^2 + 2j$ حيث $i=1,2,3$ & $j=2,3,4,5$
Out[38]:= {{5, 7, 9, 11}, {8, 10, 12, 14}, {13, 15, 17, 19}}

In[39]:= TableForm[m] ولعرض القائمة m في صورة جدول
Out[39]=

5	7	9	11
8	10	12	14
13	15	17	19

ثانيا : المصفوفات Matrices

المصفوفات والعمليات الخاصة بها تستخدم بشكل كبير في الرياضيات ويمكن الاستفادة من ماتيماتكا في إجراء العمليات الرياضية الخاصة بالمصفوفات والتي كانت تستغرق الكثير من الوقت خاصة إذا كانت المصفوفات من أبعاد كبيرة . والمصفوفات في ماتيماتكا عبارة عن قوائم من قوائم lists of lists فمثلا

- القائمة {a,b,c} تمثل المتجه (a,b,c) وهي مصفوفة من صف واحد وثلاثة اعمدة
- والقائمة {{a,b},{c,d}} تمثل المصفوفة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ وهي مصفوفة من صفين وعمودين
- والقائمة {{a₁,a₂,a₃},{b₁,b₂,b₃}} تمثل المصفوفة $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ وهي مصفوفة من صفين وثلاثة اعمدة وهكذا ،

وبالتالى فانه يمكن إدخال عناصر المصفوفة بصورة القوائم ، ويحتوى ماتيماتكا على الأوامر Table , Array والخاصة بتكوين مصفوفات ذات أبعاد مختلفة والأمر Table هو الأكثر استخداما .

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Table[f,{i,m},{j,n}]	تكوين مصفوفة من البعد mxn حيث m تمثل عدد الصفوف ، n تمثل عدد الأعمدة ، f تمثل دالة فى i,j لتوليد عناصر المصفوفة
Array[f, n]	تكوين مصفوفة على شكل صف به n من العناصر على الصورة f[i]
Array[f, {m,n}]	تكوين مصفوفة من البعد mxn على الصورة {f[i,j]} حيث [f[i,j]] يمثل العنصر فى الصف i والعمود j
MatrixForm[list]	طباعة القائمة list فى الشكل التقليدى للمصفوفة

وفي ماتيماتيكا يمكن اجراء العمليات الحسابية من جمع وطرح وضرب على المصفوفات ولتوضيح ذلك

In[1]:= Array[h,6] تكوين مصفوفة على شكل صف به 6 عناصر
Out[1]={h[1], h[2], h[3], h[4], h[5], h[6]}

In[2]:=Array[a,{2,2}] تكوين مصفوفة 2x2 عناصرها على صورة a_{ij}
Out[2]={{a[1, 1], a[1, 2]}, {a[2, 1], a[2, 2]}}

تكوين مصفوفة 3x3 عناصرها على الصورة $f_{ij} = 10i + j$ ثم عرض الناتج
في الشكل التقليدي للمصفوفة

In[3]:=f=Table[10i+j,{i,3},{j,3}]
;MatrixForm[f]

Out[3]=
$$\begin{matrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{matrix}$$

تكوين مصفوفة 3x3 عناصرها على صورة m_{ij}

In[4]:=g=Array[m,{3,3}]

Out[4]={{m[1, 1], m[1, 2], m[1, 3]},
 {m[2, 1], m[2, 2], m[2, 3]},
 {m[3, 1], m[3, 2], m[3, 3]}}

حساب مجموع المصفوفتان f , g ثم عرض الناتج في الشكل التقليدي للمصفوفة

In[5]:=MatrixForm[f+g]

Out[5]=
$$\begin{matrix} 11 + m[1, 1] & 12 + m[1, 2] & 13 + m[1, 3] \\ 21 + m[2, 1] & 22 + m[2, 2] & 23 + m[2, 3] \\ 31 + m[3, 1] & 32 + m[3, 2] & 33 + m[3, 3] \end{matrix}$$

حساب حاصل طرح المصفوفتان f , g ثم عرض الناتج في الشكل التقليدي للمصفوفة

In[6]:=MatrixForm[f-g]

Out[6]=
$$\begin{matrix} 11 - m[1, 1] & 12 - m[1, 2] & 13 - m[1, 3] \\ 21 - m[2, 1] & 22 - m[2, 2] & 23 - m[2, 3] \\ 31 - m[3, 1] & 32 - m[3, 2] & 33 - m[3, 3] \end{matrix}$$

حساب حاصل ضرب المصفوفة g في العدد 5

In[7]:=5g

Out[7]=
$$\begin{matrix} \{ 5 m[1, 1] , 5 m[1, 2] , 5 m[1, 3] \} , \\ \{ 5 m[2, 1] , 5 m[2, 2] , 5 m[2, 3] \} , \\ \{ 5 m[3, 1] , 5 m[3, 2] , 5 m[3, 3] \} \end{matrix}$$

حساب خارج قسمة المصفوفة g على 3

In[8]:= g/3

Out[8]=

$$\left\{\left\{\frac{m(1,1)}{3}, \frac{m(1,2)}{3}, \frac{m(1,3)}{3}\right\}, \left\{\frac{m(2,1)}{3}, \frac{m(2,2)}{3}, \frac{m(2,3)}{3}\right\}, \left\{\frac{m(3,1)}{3}, \frac{m(3,2)}{3}, \frac{m(3,3)}{3}\right\}\right\}$$

حساب حاصل ضرب المصفوفتان f , g

In[9]:= f . g

$$\begin{aligned} \text{Out[9]} = & \{ \{ 11 m[1, 1] + 12 m[2, 1] + 13 m[3, 1], \\ & 11 m[1, 2] + 12 m[2, 2] + 13 m[3, 2], \\ & 11 m[1, 3] + 12 m[2, 3] + 13 m[3, 3] \}, \\ & \{ 21 m[1, 1] + 22 m[2, 1] + 23 m[3, 1], \\ & 21 m[1, 2] + 22 m[2, 2] + 23 m[3, 2], \\ & 21 m[1, 3] + 22 m[2, 3] + 23 m[3, 3] \}, \\ & \{ 31 m[1, 1] + 32 m[2, 1] + 33 m[3, 1], \\ & 31 m[1, 2] + 32 m[2, 2] + 33 m[3, 2], \\ & 31 m[1, 3] + 32 m[2, 3] + 33 m[3, 3] \} \} \end{aligned}$$

تعريف المصفوفة f1 من رتبة 3x2 وتعريف المصفوفة f2 من رتبة 2x4 ثم حساب حاصل ضرب المصفوفتان f1 , f2 وعرض الناتج في الشكل التقليدي للمصفوفة

In[10]:= f1={{2,-1},{1,0},{-3,4}};f2={{1,-2,3,0},{3,4,0,1}};
MatrixForm[f1.f2]

$$\text{Out[10]} = \begin{array}{cccc} -1 & -8 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 9 & 22 & -9 & 4 \end{array}$$

وفي ماتيماتكا يمكن إجراء العمليات الأساسية على المصفوفات كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
Transpose[m]	حساب مدور المصفوفة m
Det[m]	حساب قيمة محدد المصفوفة m
Minors[m, k]	حساب مصفوفة المحددات المصاحبة من رتبة $k \times k$ من المصفوفة m
Inverse[m]	حساب معكوس المصفوفة المربعة m
MatrixPower[m,k]	حساب m^k

In[11]:=g1=Transpose[g];MatrixForm[g1] حساب مدور المصفوفة g ثم

Out[11]= $\begin{matrix} m[1, 1] & m[2, 1] & m[3, 1] \\ m[1, 2] & m[2, 2] & m[3, 2] \\ m[1, 3] & m[2, 3] & m[3, 3] \end{matrix}$ عرض الناتج في الشكل التقليدي للمصفوفة

In[12]:=g2={{2,4},{1,7}};Det[g2] تعريف المصفوفة $g2$ من رتبة 2×2

Out[12]=10 ثم حساب قيمة المحدد

In[13]:=Inverse[g2]

حساب معكوس المصفوفة g2

Out[13]= $\left\{\left\{\frac{7}{10}, -\left(\frac{2}{5}\right)\right\}, \left\{-\left(\frac{1}{10}\right), \frac{1}{5}\right\}\right\}$

In[14]:=MatrixPower[g2,3]

لحساب $(g2)^3$

Out[14]= $\{\{52, 284\}, \{71, 407\}\}$

تعريف المصفوفة g3 من رتبة 3x3 ثم حساب مصفوفة المحددات المصاحبة
من رتبة 2x2 من المصفوفة g3

In[15]:=g3={{1,5,7},{2,4,3},{-1,6,0}}; Minors[g3,2]

Out[15]= $\{\{-6, -11, -13\}, \{11, 7, -42\}, \{16, 3, -18\}\}$

In[16]:=d=Det[g3] }

حساب قيمة المحدد للمصفوفة g3

Out[16]=279

In[17]:=Inverse[g3]

حساب معكوس المصفوفة g3

Out[17]=

$\left\{\left\{-\left(\frac{18}{79}\right), \frac{42}{79}, -\left(\frac{13}{79}\right)\right\}, \left\{-\left(\frac{3}{79}\right), \frac{7}{79}, \frac{11}{79}\right\}, \left\{\frac{16}{79}, -\left(\frac{11}{79}\right), -\left(\frac{6}{79}\right)\right\}\right\}$

$f[i]$	لتحديد الصف رقم i في المصفوفة f
$f[[i,j]]$	لتحديد العنصر $f[i,j]$ بالصف رقم i والعمود رقم j في المصفوفة f
$\text{Sum}[f[[i,i]],\{i,n\}]$	لحساب مجموع عناصر القطر الرئيسى في المصفوفة المربعة f من رتبة $n \times n$
$\text{Transpose}[f][[j]]$	لتحديد العمود رقم j في المصفوفة f

In[18]:=g[[2]] تحديد الصف الثاني من المصفوفة g
Out[18]={m[2, 1], m[2, 2], m[2, 3]}

In[19]:=g[[3,1]] لتحديد العنصر الموجود في الصف الثالث والعمود الأول في المصفوفة g
Out[19]=m[3, 1]

In[20]:=Sum[g[[i,i]],{i,3}] لحساب مجموع عناصر القطر الرئيسى في المصفوفة g
Out[20]=m[1, 1] + m[2, 2] + m[3, 3]

In[21]:=Transpose[g][[3]] لتحديد العمود الثالث من المصفوفة g
Out[21]={m[1, 3], m[2, 3], m[3, 3]}

ويستطيع برنامج ماثماتيكاً تكوين مصفوفات من أشكال مختلفة كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
DiagonalMatrix[list]	تكوين مصفوفة قطرية بحيث أن عناصر القائمة list توضع في قطر المصفوفة وباقي العناصر أصفار
IdentityMatrix[n]	تكوين مصفوفة الوحدة من البعد nxn
Table[0,{m},{n}]	تكوين مصفوفة صفرية من البعد mxn
Table[If[i<=j,1,0],{i,m},{j,n}]	تكوين مصفوفة مثلثية عليا Upper Triangular عناصرها في أعلى القطر 1 وخلاف ذلك أصفار

In[22]:=DiagonalMatrix[{a,b,c}] تكوين مصفوفة قطرية من القائمة {a,b,c}
Out[22]={{a, 0, 0}, {0, b, 0}, {0, 0, c}}

In[23]:=IdentityMatrix[3] تكوين مصفوفة الوحدة من البعد 3x3
Out[23]={{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

In[24]:=Table[0,{i,3},{j,2}] تكوين مصفوفة صفرية من البعد 3x2
Out[24]={{0,0},{0,0},{0,0}}

In[25]:=Table[If[i<=j,1,0],{i,3},{j,3}] تكوين مصفوفة مثلثية عليا من البعد 3x3
Out[25]={{1, 1, 1}, {0, 1, 1}, {0, 0, 1}}

In[26]:=Table[If[i>=j,1,0],{i,4},{j,4}] تكوين مصفوفة مثلثية سفلى من البعد 4x4
Out[26]=
{{1, 0, 0, 0}, {1, 1, 0, 0}, {1, 1, 1, 0}, {1, 1, 1, 1}}

In[27]:=MatrixForm[%26] لعرض المصفوفة الناتجة من جملة الإدخال
Out[27]=

1	0	0	0
1	1	0	0
1	1	1	0
1	1	1	1

 In[26] في الشكل التقليدي للمصفوفة

ثالثا : حل الأنظمة الخطية Solving Linear Systems

نظرية المعادلات الخطية linear equations تلعب دورا هاما في الجبر الخطي , وفي الحقيقة فإن دراسة مسائل عديدة في الجبر الخطي يتم تحويلها الى دراسة نظام من المعادلات

الخطية . والمعادلة الخطية هي معادلة لها الصورة $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$ حيث x_i تمثل متغيرات , a_i أعداد حقيقية وتمثل معاملات المتغيرات , b عدد حقيقي ويمثل الحد الثابت .

وكثيرا ما نحتاج الى إيجاد حلول أنظمة من المعادلات الخطية , وفي بعض الحالات يكون من الأفضل كتابة المعادلات ثم حلها باستخدام الأمر Solve وفي حالات أخرى يكون من المفيد تحويل نظام المعادلات الخطية الى شكل مصفوفات $m \cdot x = b$ حيث x يمثل متجه المتغيرات , m يمثل مصفوفة المعاملات , b يمثل متجه الثوابت .

حل المعادلتين باستخدام الأمر Solve مباشرة `In[1]:=Solve[{x+5y==1,2x+y==3},{x,y}]`

`Out[1]={{x->14/9,y->-1/9}}`

تعريف المصفوفة mat1 من رتبة 3x3 `In[2]:=mat1={{2,1,-2},{3,2,2},{5,4,3}}`

`Out[2]={{2, 1, -2}, {3, 2, 2}, {5, 4, 3}}`

تكوين نظام من ثلاث معادلات `In[3]:=mat1.{x,y,z}=={10,1,4}`

`Out[3]={2 x + y - 2 z, 3 x + 2 y + 2 z, 5 x + 4 y + 3 z} == {10, 1, 4}`

حل نظام المعادلات باستخدام الأمر `In[4]:=Solve[%,{x,y,z}]`

`Out[4]={{x -> 1, y -> 2, z -> -3}}` Solve مباشرة

حل نظام المعادلات باستخدام معكوس المصفوفة `In[5]:= {x,y,z}=Inverse[mat1].{10,1,4}`

`Out[5]={1, 2, -3}`

وبرنامج ماتيماتيكا قادر على حل نظام المعادلات الخطية في صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** كالآتي :

LinearSolve[m, b]	لايجاد متجه المتغيرات x الذي يحقق نظام المعادلات الخطية $m \cdot x = b$
--------------------------	--

وعند التعامل مع مصفوفات من ابعاد كبيرة يكون من الافضل استخدام الأمر **LinearSolve** لحل نظام المعادلات .

حل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

في صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** يكون كالآتي:

```
In[6]:=LinearSolve[mat1,{10,1,4}]
Out[6]={1, 2, -3}
```

حيث **mat1** هي مصفوفة المعاملات $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ في نظام المعادلات المعرف في جملة الإدخال **In[3]** والحل يكون

$$x = 1, y = 2, z = -3$$

حل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

في صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** يكون كالآتي :

In[7]:=mat2={{1,2,-3},{2,-1,4},{4,3,-2}};

LinearSolve[mat2,{6,2,14}]

Out[7]={2, 2, 0}

x = 2 , y = 2 , z = 0

والحل يكون

حل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

في صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** يكون كالآتي :

In[8]:=mat3={{1,-3,4,-2},{0,2,5,1},{0,1,-3,0}};

LinearSolve[mat3,{5,2,4}]

Out[8]={ $\frac{157}{11}$, $\frac{26}{11}$, $-\frac{6}{11}$, 0}

ونلاحظ أن نظام المعادلات يتكون من ثلاثة معادلات في أربعة مجاهيل وله عدد لا نهائي من الحلول لأنه تم حساب ثلاث مجاهيل بدلالة المجهول الرابع ونتج الحل يمثل حل نظام المعادلات بعد اخذ قيمة عددية للمجهول الرابع .

وإذا كان m مصفوفة مربعة فإننا نعلم من دراستنا في الجبر الخطي أن نظام المعادلات

$$m \cdot x = b$$

يكون له حل وحيد لأي متجه ثابت b إذا كان محدد المصفوفة m لا يساوي صفر بينما إذا كان محدد المصفوفة m يساوي صفر فهذا يعني أنه لا يوجد حل x يحقق نظام المعادلات $m \cdot x = b$. $x = b$ لقيمة خاصة للمتجه b وبمعنى آخر أن المعادلات تعتمد على بعضها **dependent** وفي هذه الحالة فإن مجموعة المتجهات x التي تحقق $m \cdot x = 0$ تسمى الفراغ الصفري **nullspace** للمصفوفة m أو **kernel m** وماتيماتكا قادر على حساب متجهات الأساس **Basis** للفراغ الصفري لمصفوفة وذلك باستخدام الأمر **NullSpace** كآلاتي :

NullSpace[m]

لإيجاد متجهات أساس **basis vectors** جميع تركيباتها الخطية **linear combinations** تحقق المعادلة $m \cdot x = 0$ حيث 0 هو المتجه الصفري

In[9]:=mat4={{1,2,1},{2,4,2},{3,6,3}} محدد المصفوفة **mat4** يساوي صفر

;Det[mat4]

Out[9]=0

In[10]:=LinearSolve[mat4,{a,b,c}] الدالة **LinearSolve** لا تستطيع إيجاد

Out[10]=LinearSolve::nosol: حل نظام المعادلات

Linear equation encountered which has no solution.

LinearSolve[{{1, 2, 1}, {2, 4, 2}, {3, 6, 3}}, {a, b, c}]

In[11]:=NullSpace[mat4] أساس الفراغ الصفري للمصفوفة **mat4**

Out[11]={{-1, 0, 1}, {-2, 1, 0}} يحتوي على متجهان

ومن المميزات الهامة للأمر **LinearSolve** والأمر **NullSpace** هو التعامل مع مصفوفات من أي رتبة .

رابعاً : القيم المميزة والمتجهات المميزة Eigenvalues and Eigenvectors

القيم المميزة لمصفوفة m هي قيم λ التي تحقق المعادلة $m \cdot \lambda \cdot x = x$ حيث x متجه غير صفري وفي هذه الحالة فإن المتجهات x التي تحقق هذه المعادلة تسمى المتجهات المميزة للمصفوفة m والتي تناظر القيمة المميزة λ ويمكن الحصول على القيم المميزة من حل كثيرة الحدود المميزة Characteristic polynomial وتعطى بالمعادلة

$$|m - \lambda J| = 0$$

حيث J مصفوفة الوحدة ، وبرنامج ماتيماتكا قادر على حساب القيم المميزة والمتجهات المميزة لأي مصفوفة كالاتي :

الوظيفة التي يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
تكوين قائمة تحتوي على جميع القيم المميزة للمصفوفة m	Eigenvalues[m]
تكوين قائمة تحتوي على جميع المتجهات المميزة للمصفوفة m	Eigenvectors[m]
تكوين قائمة تحتوي على جميع القيم المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة m وتكون بالصورة { eigenvalue,eigenvector }	Eigensystem[m]
تكوين قائمة تحتوي على قيم عددية تقريبية للقيم المميزة للمصفوفة m	Eigenvalues[N[m]]

In[1]:=m={{1,2},{3,2}}

تعريف المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Out[1]= {{1, 2}, {3, 2}}

In[2]:=Eigenvalues[m]

Out[2]= Eigenvalues::eival:

Unable to find all roots of the characteristic polynomial.

Eigenvalues[{{1, 2}, {3, 2}}]

نلاحظ أن ماتيماتيكا لا يتمكن من حساب القيم المميزة للمصفوفة m لأن عناصر المصفوفة أعداد صحيحة ويمكن التغلب على هذه المشكلة عن طريق كتابة الأعداد الموجودة في المصفوفة بالصورة العشرية (فمثلا يكتب 3 بدلا من 3) كما يمكن عمل ذلك باستخدام الدالة N

In[3]:=Eigenvalues[N[m]]

القيم المميزة للمصفوفة m

Out[3]= {4., -1.}

In[4]:=Eigenvectors[N[m]]

المتجهات المميزة للمصفوفة m

Out[4]= {{-0.5547, -0.83205}, {-0.707107, 0.707107}}

In[5]:={values,vectors}=Eigensystem[N[m]] تكوين قائمة تحتوي على جميع القيم

Out[5]= {{4., -1.}, {{-0.5547, -0.83205}, {-0.707107, 0.707107}}} المميزة و المتجهات المميزة للمصفوفة m

للتحقق من أن القيمة المميزة الأولى k_1 والمتجه المميز x يحقق المعادلة $m \cdot x = k_1 x$

In[6]:=m.vectors[[1]]==values[[1]] vectors[[1]]

Out[6]= True

لإيجاد المعادلة المميزة للمصفوفة m

In[7]:=po=Det[m-k IdentityMatrix[Dimensions[m]{{1}}]]

Out[7]= -4 - 3 k + k²

حل المعادلة المميزة والحصول على القيم المميزة للمصفوفة m

In[8]:=Solve[po==0,k]

Out[8]= {{k -> -1}, {k -> 4}}

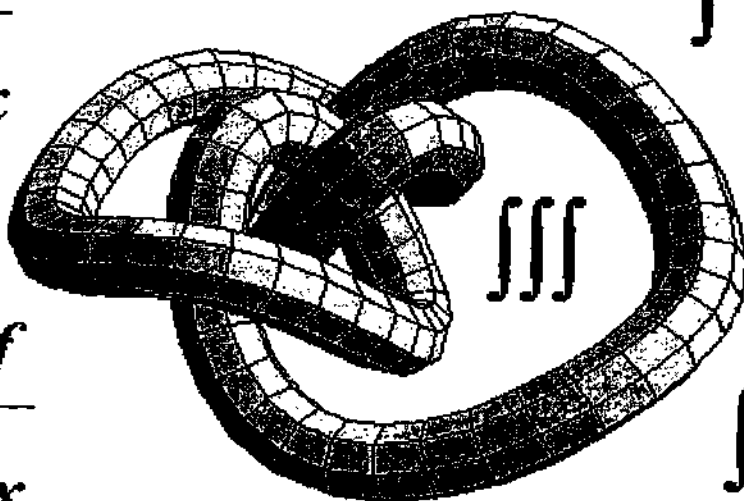
الباب الرابع
ماثيماتيكما والتفاضل والتكامل

df

dx

∂f

∂x



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكما
والخاصة بالموضوعات الآتية :

Defining Functions

Limits

Differentiation

Integration

Differential Equations

١. تعريف الدوال

٢. النهايات

٣. التفاضل

٤. التكامل

٥. المعادلات التفاضلية

الباب الرابع

ماثيماتيك والتفاضل والتكامل

نعلم أن برنامج ماثيماتيك يستطيع التعامل مع التعبيرات الرمزية **Symbolic expressions** بنفس المقدرة على التعامل مع الأعداد و لذلك يمكن استخدام ماثيماتيك في حساب النهايات **Limits** وحساب التفاضل والتكامل **Calculus** للدوال المختلفة والحصول على النتائج في صورة رمزية سواء كانت هذه الدوال من الدوال الأساسية الموجودة داخل بناء ماثيماتيك **built-in** أو دوال نقوم بتعريفها ، وكذلك يمكن استخدام ماثيماتيك في حل المعادلات التفاضلية .

١ . تعريف الدوال **Defining Functions**

إلى جانب العديد من الدوال الموجودة داخل بناء ماثيماتيك فإنه يمكن للمستخدم إضافة أي دوال جديدة يحتاج إليها وبأسماء يقترحها بنفسه وسوف نستخدم الحروف الصغيرة **lower case - letters** في كتابة أسماء هذه الدوال الجديدة حتى لا يحدث تداخل بين أسماء الدوال الموجودة في بناء ماثيماتيك وبين أسماء الدوال الجديدة التي يقوم المستخدم بتعريفها وفقا لقواعد معينة . فمثلا تعريف الدالة $f(x)=x^2$ في ماثيماتيك يكتب في الصورة $f[x]=x^2$ والعلامة **blank space** الموجودة في الطرف الأيسر بجانب المتغير x تسمى الفراغ الخالي **blank space** وهي هامة في تعريف الدالة حيث النمط **pattern** $x_$ يرمز الى أي تعبير أو متغير وبذلك فإن تعريف الدالة بهذه الصورة يصف قاعدة تحويل **Transformation Rule** لجميع التعبيرات التي على الصورة $f[anything]$ حيث **anything** يشير الى المتغير x أو أي متغير آخر

وعندما يظهر تعبير على الصورة $f[\text{anything}]$ فإنه يستبدل بالقيمة anything^2 والتي تمثل ناتج تعريف الدالة f .

تعريف الدالة $f(x)=x^2$
 $\text{In}[1]:=f[x_]=x^2$
 $\text{Out}[1]=x^2$

عند حساب قيمة الدالة $f(x)$ عند $x=3$
 $\text{In}[2]:=f[3]$
 $\text{Out}[2]=9$
 فإن الناتج يكون 3^2 ويساوى 9

لحساب قيمة الدالة $f(x)$ عند $x=a+1$
 $\text{In}[3]:=f[a+1]$
 $\text{Out}[3]=(a+1)^2$

عند حساب قيمة $f(x) + f(y)$
 $\text{In}[4]:=f[x]+f[y]$
 $\text{Out}[4]=x^2 + y^2$

وفي حالة عدم كتابة العلامة _ بالطرف الأيسر في تعريف الدالة فإن $f[x]$ سوف تمثل تعبير خاص وليس قاعدة تحويل فمثلا إذا أدخلنا في ماتيماتيكا التعريف $g[x]=x^3$ فإنه عند ظهور التعبير $g[x]$ يتم استبداله بالقيمة x^3 لكن التعريف لا يعطينا أي معلومات إذا استبدلنا المتغير x بقيمة عددية أو بمتغير آخر فمثلا $g[3]$ ليس لها قيمة ناتجة من التعريف وبالمثل $g[a]$ ليس لها قيمة ناتجة من التعريف وهذا حدث نتيجة لعدم استخدام النمط _ في تعريف الدالة g .

تعريف $g(x)=x^3$ بدون استخدام النمط _
 $\text{In}[5]:=g[x]=x^3$
 $\text{Out}[5]=x^3$

عند حساب قيمة $g(x)$ عند $x=3$ فإن الناتج
 $\text{In}[6]:=g[3]$
 $\text{Out}[6]=g[3]$
 يكون $g[3]$ أي أن $g(x)$ لا تمثل قاعدة تحويل

In[7]:=g[a] لحساب قيمة $g(x)$ عند $x=a$ فإن الناتج
Out[7]= g[a] يكون $g[a]$ أي أن $g(x)$ لا تمثل قاعدة تحويل

In[8]:=g[x]+g[y] عند حساب قيمة $g(x) + g(y)$ نلاحظ أن الناتج
Out[8]=x³ + g[y] لأن $x^3 = g(x)$ بينما $g(y)$ ليست معلومة

ونتيجة لذلك يجب مراعاة الآتي عند تعريف الدوال في ماتيماتكا :

$f[x] = \text{value}$	تمثل تعريف لتعبير خاص وليس قاعدة تحويل
$f[x_] = \text{value}$	تمثل تعريف دالة وهي قاعدة تحويل لأي متغير x

وفي ماتيماتكا يمكن الاستعلام عن تعريف الدوال أو حذف التعريف من الذاكرة كالآتي :

?f	للاستعلام عن تعريف الدالة f
Clear[f]	لحذف تعريف الدالة f من الذاكرة

In[9]:=?f للاستعلام عن تعريف الدالة f التي سبق
Out[9]= Global`f إدخالها في جملة الإدخال **In[1]**
 $f[x_] = x^2$

In[10]:=Clear[f] لحذف تعريف الدالة f من الذاكرة

In[11]:=?f والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة f
Out[11]= Global`f نلاحظ أن التعريف قد حذف من الذاكرة

وفي برنامج ماثياتيكا يمكن تعريف دوال في أكثر من متغير ويتم ذلك بتحديد اسم للدالة واستخدام النمط _ لكل متغير في الدالة .

تعريف الدالة r1 في متغيرين

$$\text{In}[12]:=r1[x_,y_]=x^2+x y+y^2$$

$$\text{Out}[12]=x^2 + x y + y^2$$

حساب قيمة الدالة r1(x,y)

$$\text{In}[13]:=r1[2,3]$$

$$\text{Out}[13]=19$$
 عند $x=2$, $y=3$

تعريف الدالة r2 في أربعة متغيرات

$$\text{In}[14]:=r2[x_,y_,z_,t_]=(x-z)^2+(y-t)^2$$

$$\text{Out}[14]=(x-z)^2 + (y-t)^2$$

وفي برنامج ماثياتيكا عند تعريف دالة كجمله إحلال $hs = rhs$ فإنه يوجد مؤثرين للإحلال assignment operators
 المؤثر الأول هو علامة التساوى =
 والمؤثر الثاني هو علامة :=

والفرق الأساسي بين المؤثرين يكون وفقا لطريقة حساب الطرف الأيمن rhs لجمله الإحلال كالاتي :

المؤثر = يستخدم في كتابة جملة الإحلال بالصورة $lhs = rhs$ إذا كان الطرف الأيمن rhs يتم حسابه مباشرة ليمثل القيمة النهائية للطرف الأيسر lhs
 المؤثر := يستخدم في كتابة جملة الإحلال بالصورة $lhs := rhs$ إذا كان الطرف الأيمن rhs يتم حسابه كل مرة يطلب فيها حساب قيمة الطرف الأيسر lhs بمعنى إذا كان الطرف الأيمن rhs يمثل أمر أو برنامج يتم تنفيذه عند السؤال عن الطرف الأيسر lhs

والأمثلة الآتية توضح الفرق بين المؤثر = والمؤثر :=

عند استخدام المؤثر = في تعريف الدالة $r3(x)$ التي تقوم بحساب مفعوك $(1+x)^2$ فإن المفعوك بالطرف الأيمن يتم حسابه مباشرة

```
In[15]:=r3[x_]=Expand[(1+x)^2]
Out[15]= 1+2x+x^2
```

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة $r3(x)$ نلاحظ أن التعريف يحتوى على الطرف الأيمن بعد تنفيذه في صورة مفعوك

```
In[16]:=?r3
Out[16]=Global`r3
r3[x_]= 1 + 2*x + x^2
```

ولحساب قيمة الدالة $r3(x)$ عند $x = a + b$ يتم التعويض عن $a + b$ في المفعوك الموجود بالفعل وهو $1 + 2x + x^2$

```
In[17]:=r3[a+b]
Out[17]=1 + 2 (a + b) + (a + b)^2
```

عند استخدام المؤثر := في تعريف الدالة $r4(x)$ التي تقوم بحساب مفعوك $(1+x)^2$ فإن المفعوك بالطرف الأيمن يعاد حسابه في كل مرة يطلب فيها حساب قيمة الدالة $r4(x)$

```
In[18]:=r4[x_]:=Expand[(1+x)^2]
```

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة $r4(x)$ نلاحظ أن التعريف هو نفسه الطرف الأيمن ويحتوى على أمر المفعوك Expand جاهز للتنفيذ

```
In[19]:=?r4
Out[19]=Global`r4
r4[x_]:= Expand[(1 + x)^2]
```

ولحساب قيمة الدالة $r4(x)$ عند $x = a + b$ يتم التعويض عن $a + b$ في أمر المفعوك $Expand[(1+a+b)^2]$ ثم يتم تنفيذه

```
In[20]:=r4[a+b]
Out[20]=1 + 2 a + a^2 + 2 b + 2 a b + b^2
```

وكمثال آخر نفرض أننا نريد تصميم دالة لحساب
مضروب أي عدد صحيح Factorial function من القاعدة

$$n! = n (n-1) (n-2) \dots 3 \times 2 \times 1$$

تعريف دالة المضروب تحت اسم fa In[21]:=fa[1]=1;fa[n_]:=n fa[n-1]

نلاحظ انه في جملة الإحلال الأولى fa[1]=1 استخدمنا المؤثر = لأن الطرف الأيمن قيمته
محسوبة بينما في جملة الإحلال الثانية fa[n]:=n fa[n-1] استخدمنا المؤثر := لأن
الطرف الأيمن يتم حسابه كل مرة تنفيذ والقيمة المحسوبة بالطرف الأيسر lhs يتم استخدامها
في حساب الطرف الأيمن rhs في كل مرة لذلك فإن المؤثر := ضروري في تعريف هذه
الدالة .

In[22]:=fa[4]

لحساب 4!

Out[22]=24

In[23]:=fa[6]

لحساب 6!

Out[23]=720

In[24]:=?fa

للاستعلام عن الدالة fa

Out[24]=Global`fa

fa[1] = 1

fa[n_] := n*fa[n - 1]

In[25]:=Clear[fa]

حذف تعريف الدالة fa من ذاكرة ماتيماتيكسا

In[26]:=?fa

للاستعلام عن الدالة fa بعد حذفها ونلاحظ

Out[26]=Global`fa

اختفاء التعريف

وماتيماتيكسا عند تنفيذه لهذه الدالة لحساب fa[6] يستخدم التعريف المعطى للدالة بالصورة fa[6]=6 fa[5] وبعد ذلك يتم تطبيق التعريف مرة أخرى لحساب fa[5] من العلاقة fa[5]=5 fa[4] وبالمثل يتم تطبيق التعريف مرة أخرى لحساب fa[4] وهكذا حتى يصل الى fa[1] وقيمه معطاة ونلاحظ أن ماتيماتيكسا عند حسابه لقيمة fa[6] لم يستخدم قيمة fa[4] المحسوبة من قبل ، ويمكن جعل الدوال المعرفة تتذكر القيم التى يتم حسابها من قبل وذلك بتعريف الدوال بالصورة الآتية :

تعريف دالة f يث تحفظ القيم التى يتم إيجادها $f[x_]:=f[x] = rhs$

In[27]:=fa[1]=1;fa[n_]:=fa[n]=n fa[n-1]

تعريف دالة المضروب تحت اسم fa

بحيث تحفظ القيم التى يتم إيجادها

In[28]:=?fa

للاستعلام عن الدالة fa

Out[28]=Global`fa

fa[1] = 1

fa[n_] := fa[n] = n*fa[n - 1]

In[29]:=fa[4]

حساب 4! بواسطة fa[4]

Out[29]=24

In[30]:=?fa

للاستعلام عن الدالة fa وسوف نلاحظ انه تم

Out[30]=Global`fa

حفظ جميع قيم الدالة fa التي تم إيجادها

fa[1] = 1

fa[2] = 2

fa[3] = 6

fa[4] = 24

fa[n_] := fa[n] = n*fa[n - 1]

In[31]:=fa[6]

حساب 6! بواسطة fa[6]

Out[31]=720

In[32]:=?fa

للاستعلام عن الدالة fa وسوف نلاحظ انه تم

Out[32]=Global`fa

حفظ جميع قيم الدالة fa التي تم إيجادها

fa[1] = 1

fa[2] = 2

fa[3] = 6

fa[4] = 24

fa[5] = 120

fa[6] = 720

fa[n_] := fa[n] = n*fa[n - 1]

٢ . النهايات Limits

فى بعض الحسابات الرياضية نحتاج الى تعويض أو إحلال لمتغير داخل التعبير الرياضى عندما يأخذ المتغير قيمة معينة فمثلا عند وضع جملة الإحلال $x = 3$ فهذا يعنى أن يقوم ماتيماتكا باستبدال المتغير x بالقيمة 3 فى أي مكان بالبرنامج يظهر فيه المتغير x إلا إذا تم تغير قيمة x أو حذفها ، ولكن فى بعض الأحيان يكون المطلوب هو استبدال المتغير x بالقيمة 3 فى تعبير خاص **particular expression** ، ويمكن عمل ذلك فى ماتيماتكا باستخدام المؤثر **/** أو المؤثر **//** كالآتي :

الوظيفة التى يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
استبدال المتغير x بالقيمة $value$ فى التعبير $expr$ ويتم تطبيق القاعدة $x \rightarrow value$ مرة واحدة فقط	expr /. x->value
استبدال المتغير x بالقيمة $xval$ والمتغير y بالقيمة $yval$ فى التعبير $expr$ ويتم تطبيق القاعدة $x \rightarrow xval$, $y \rightarrow yval$ مرة واحدة فقط	expr /. {x->xval,y->yval}
تطبيق القاعدة $rules$ فى التعبير $expr$ مرة واحدة فقط حيث القاعدة $rules$ تكون بالصورة $lhs \rightarrow rhs$	expr /. rules
تطبيق القاعدة $rules$ على كل أجزاء التعبير $expr$ بصورة متكررة حتى نصل الى الناتج النهائى	expr //. rules
تطبيق القاعدة $rules$ كوحدة متكاملة على التعبير $expr$ دون تطبيقها على الأجزاء الفرعية من $expr$	Replace[expr,rules]

In[1]:=1+x^2/.x->3 استبدال المتغير x بالقيمة 3 في التعبير الرياضي

Out[1]=10 $x^2 + 1$

In[2]:=x عند الاستعلام عن قيمة x نلاحظ أن استخدام

Out[2]=x المؤثر /. في استبدال المتغير x بالقيمة 3 لا يؤثر في قيمة المتغير x داخل البرنامج

In[3]:=x^2+2x y+y^2/.{x->1,y->2} استبدال المتغير x بالقيمة 1 والمتغير

Out[3]=9 y بالقيمة 2 في التعبير الرياضي

$$x^2 + 2xy + y^2$$

In[4]:=t=x^2+2x+1;t/.x->5 إحلال قيمة $x^2 + 2x + 1$ في المتغير

Out[4]=36 t ثم حساب قيمة t عندما $x \rightarrow 5$

In[5]:=f[5]/.f[x_]->x تطبيق القاعدة lhs->rhs لحساب f[5]

f[x-1]

Out[5]=5 f[4] ونلاحظ أن المؤثر /. يقوم بتطبيق القاعدة مرة واحدة فقط

In[6]:=f[5]/.{f[1]->1,f[x_]->x f[x-1]} عند استخدام المؤثر //. يتم تطبيق القاعدة

Out[6]=120 لحساب f[5] بصورة متكررة حتى نصل إلى الناتج النهائي

In[7]:=f[x]^2+2f[x] /. f[x]->a عند استخدام المؤثر /. يتم تطبيق القاعدة

Out[7]=2a + a^2 على كل الأجزاء في التعبير الرياضي

عند حساب قيمة $\frac{\sin(x)}{x}$ لقيم x التي تقرب من الصفر نلاحظ ما يأتي :

In[8]:=Sin[x]/x /.x->0.6 Out[8]=0.941071	In[12]:=Sin[x]/x /.x->0.2 Out[12]=0.993347
In[9]:=Sin[x]/x /.x->0.5 Out[9]=0.958851	In[13]:=Sin[x]/x /.x->0.1 Out[13]=0.998334
In[10]:=Sin[x]/x /.x->0.4 Out[10]=0.973546	In[14]:=Sin[x]/x /.x->0.01 Out[14]=0.999983
In[11]:=Sin[x]/x /.x->0.3 Out[11]=0.985067	In[15]:=Sin[x]/x /.x->0.001 Out[15]=1.

ولحساب قيمة $\frac{\sin(x)}{x}$ عندما $x = 0$ فإن الناتج يكون كمية غير معينة

In[16]:=Sin[x]/x /.x->0

Out[16]=Power::infy: Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered.

Infinity::indet:

Indeterminate expression

وفي برنامج ماتيماتيكا يمكن حساب النهايات $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ وذلك باستخدام

الدالة Limit كالآتي :

Limit[expr, x->x ₀]	حساب نهاية الدالة expr عندما تقرب x من x ₀
---------------------------------	--

في الجدول الآتي نضع أمثلة متعددة على النهايات لبعض الدوال

النهاية بلغة ماثيماتيكا	النهاية بلغة الرياضيات
In[17]:=Limit[x^2+3x-7,x->2] Out[17]=3	$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3x - 7$
In[18]:=Limit[(x^2-1)/(x-1),x->1] Out[18]=2	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
In[19]:=Limit[(x^2-9)/(x^2-4x+3),x->3] Out[19]=3	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}$
In[20]:=Limit[(x^2+x-6)/(x^2-4),x->2] Out[20]= $-\frac{5}{4}$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$
In[21]:=Limit[(Sqrt[x]-2)/(x-4),x->4] Out[21]= $\frac{1}{4}$	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$
In[22]:=Limit[Sqrt[x^2-4]/(x-2),x->2] Out[22]=Infinity	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$
In[23]:=Limit[x^2(x+h)/(2x+h),h->0] Out[23]= $\frac{x^2}{2}$	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 (x + h)}{2x + h}$
In[24]:=Limit[x/Sqrt[x-1],x->1] Out[24]= Infinity	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{x - 1}}$

النهاية بلغة ماتيماتكا	النهاية بلغة الرياضيات
In[25]:=Limit[Sin[x]/x,x->0] Out[25]=1	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$
In[26]:=Limit[(Cos[x]-1)/x^2,x->0] Out[26]= $-\frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$
In[27]:=Limit[x^2/(Sec[x]-1),x->0] Out[27]=2	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sec(x) - 1}$
In[28]:=Limit[Sin[x-Pi/4]/(x-Pi/4)^2, x->Pi/4] Out[28]=Infinity	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}$
In[29]:=Limit[Tan[3x]/(2x^2+5x),x->0] Out[29]= $\frac{3}{5}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{2x^2 + 5x}$
In[30]:=Limit[(2x^2-3x) / (3x^2+2),x->Infinity] Out[30]= $\frac{2}{3}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x}{3x^2 + 2}$
In[31]:=Limit[x^2 Sin[1/x^2],x->Infinity] Out[31]=1	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$
In[32]:=Limit[(1+1/n)^n,n->Infinity] Out[32]=E	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

٣ . التفاضل Differentiation

يستطيع برنامج ماتيماتيكا إجراء عمليات التفاضل للدوال الرياضية المختلفة في صورتها الرمزية في متغير واحد أو متغيرات متعددة ويتم الحصول على النتائج بصورة رمزية سواء كان التفاضل كلي Total أو تفاضل جزئي Partial ويتم ذلك في ماتيماتيكا باستخدام الأمر D كآلاتي :

الصيغة العامة للأمر في ماتيماتيكا	الوظيفة التي يقوم بها الأمر
$D[f,x]$	حساب المشتقة الأولى $\frac{df}{dx}$ إذا كانت الدالة f في متغير واحد أو حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ إذا كانت الدالة f في أكثر من متغير
$D[f,\{x,n\}]$	حساب المشتقة $\frac{d^n f}{dx^n}$ إذا كانت الدالة f في متغير واحد أو حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ إذا كانت الدالة f في أكثر من متغير
$D[f,x_1,x_2,...]$	حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} ... f$
$D[f,x,NonConstants->\{v_1,v_2,...\}]$	حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ مع اعتبار أن المتغيرات $v_1,v_2,...$ دوال تعتمد على المتغير x

فى الجدول الآتى نضع أمثلة لتفاضل بعض الدوال

التفاضل بلغة ماتيماتيكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[1]:=D[x^n,x] Out[1]= n x ⁿ⁻¹	$\frac{d}{dx} x^n$
In[2]:=D[x^5+4x^3-2x+6,x] Out[2]= -2 + 12 x ² + 5 x ⁴	$\frac{d}{dx} (x^5 + 4x^3 - 2x + 6)$
In[3]:=D[x^5+4x^3-2x+6,{x,2}] Out[3]=24 x + 20 x ³	$\frac{d^2}{dx^2} (x^5 + 4x^3 - 2x + 6)$
In[4]:=D[x^n,{x,3}] Out[4]=(-2 + n) (-1 + n) n x ⁿ⁻³	$\frac{d^3}{dx^3} x^n$
In[5]:=D[Sin[x],x] Out[5]=Cos[x]	$\frac{d}{dx} \sin(x)$
In[6]:=D[Tan[x],x] Out[6]=Sec ² [x]	$\frac{d}{dx} \tan(x)$
In[7]:=D[x^3 Cos[x],x] Out[7]=3 x ² Cos[x] - x ³ Sin[x]	$\frac{d}{dx} x^3 \cos(x)$
In[8]:=D[4x^2 Sec[x^3],x] Out[8]=8x ² Sec[x ³] + 12 x ⁴ Sec[x ³] Tan[x ³]	$\frac{d}{dx} 4x^2 \sec(x^3)$

التفاضل بلغة ماثيماتيك	التفاضل بلغة الرياضيات
In[9]:=D[ArcSin[x],x] Out[9]= $\frac{1}{\text{Sqrt}[1-x^2]}$	$\frac{d}{dx} \sin^{-1}(x)$
In[10]:=D[ArcTan[x^2],x] Out[10]= $\frac{2x}{1+x^4}$	$\frac{d}{dx} \tan^{-1}(x^2)$
In[11]:=D[Sin[t]/t,t] Out[11]= $\frac{\text{Cos}[t]}{t} - \frac{\text{Sin}[t]}{t^2}$	$\frac{d}{dx} \frac{\sin(t)}{t}$
In[12]:=D[Log[x]^2,x] Out[12]= $\frac{2\text{Log}[x]}{x}$	$\frac{d}{dx} (\text{Log}(x))^2$
In[13]:=D[f[x],x] Out[13]=f'[x]	$\frac{d}{dx} f(x)$
In[14]:=D[f[x^2],x] Out[14]=2 x f'[x]	$\frac{d}{dx} f(x^2)$
In[15]:=D[x^2+y[x]^3,x] Out[15]= 2x + 3 (y[x])^2 y'[x]	$\frac{d}{dx} (x^2 + (y(x))^3)$
In[16]:=D[x^2+y^3,x,NonConstants->{y}] Out[16]= 2x + 3 y^2 D[y, x, NonConstants -> {y}]	$\frac{d}{dx} (x^2 + y^3)$ مع اعتبار أن y دالة في x

التفاضل بلغة ماتيماتكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[17]:=D[x^2 y+Cos[x y],x] Out[17]=2 x y - y Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 y + \cos(xy))$
In[18]:=D[x^2 y+Cos[x y],y] Out[18]=x^2 - x Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 y + \cos(xy))$
In[19]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,x] Out[19]=2y - y^2 Cos[x y]	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 y + \cos(xy))$
In[20]:=D[x^2 y+Cos[x y],y,y] Out[20]=- x^2 Cos[x y]	$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (x^2 y + \cos(xy))$
In[21]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y] Out[21]=2x - x y Cos[x y] - Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y + \cos(xy))$
In[22]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,x,x] Out[22]=y^3 Sin[x y]	$\frac{\partial^3}{\partial x^3} (x^2 y + \cos(xy))$
In[23]:=D[x^2 y+Cos[x y],y,y,y] Out[23]=x^3 Sin[x y]	$\frac{\partial^3}{\partial y^3} (x^2 y + \cos(xy))$
In[24]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y,x] Out[24]=2 -2y Cos[x y] + x y^2 Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y + \cos(xy))$
In[25]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y,y] Out[25]=- 2 x Cos[x y] + x^2 y Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (x^2 y + \cos(xy))$

وعند إجراء التفاضل على دالة f في عدة متغيرات وبحيث يتم إدخالها بالرمز f نلاحظ أن نتائج التنفيذ يكون كالآتي :

In[26]:=D[f[x,y],x] Out[26]= $f^{(1,0)}[x,y]$	$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ تمثل $f^{(1,0)}[x,y]$
In[27]:=D[f[x,y],y] Out[27]= $f^{(0,1)}[x,y]$	$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ تمثل $f^{(0,1)}[x,y]$
In[28]:=D[f[x,y],x,x] Out[28]= $f^{(2,0)}[x,y]$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)$ تمثل $f^{(2,0)}[x,y]$
In[29]:=D[f[x,y],x,y] Out[29]= $f^{(1,1)}[x,y]$	$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ تمثل $f^{(1,1)}[x,y]$
In[30]:=D[f[x,y],x,y,y] Out[30]= $f^{(1,2)}[x,y]$	$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)$ تمثل $f^{(1,2)}[x,y]$
In[31]:=D[f[x,y,z],x] Out[31]= $f^{(1,0,0)}[x,y,z]$	$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)$ تمثل $f^{(1,0,0)}[x,y,z]$
In[32]:=D[f[x,y,z],x,x,y,z, z,z] Out[32]= $f^{(2,1,3)}[x,y,z]$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^3}{\partial z^3} f(x,y,z)$ تمثل $f^{(2,1,3)}[x,y,z]$

نعلم أن إذا كانت $f = f(x,y)$ فإن التفاضلة الكلية (Total Differential) يرمز لها df وتعرف بالصورة

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

والأمر D كما رأينا في المثال $D[x^n, x]$ يقوم بحساب المشتقة الجزئية للدالة x^n بالنسبة إلى x مع اعتبار أن n ثابت لا يعتمد على x وفي ماتيماتكا يوجد أمر آخر يرمز له Dt ويقوم بحساب المشتقة الكلية Total Derivative وعند تنفيذه فإنه يأخذ جميع المتغيرات في الاعتبار .

الوظيفة التي يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر في ماتيماتكا
حساب التفاضلة الكلية df	$Dt[f]$
حساب المشتقة الكلية $\frac{df}{dx}$	$Dt[f,x]$
حساب المشتقة الكلية من رتبة n أي حساب $\frac{d^n f}{d x^n}$	$Dt[f,\{x,n\}]$
حساب المشتقة الكلية $\frac{df}{dx}$ مع اعتبار أن المتغيرات $v1,v2,...$ ثوابت لا تعتمد على المتغير x أي أن $dv1=0, dv2=0, ...$	$Dt[f,x,Constants->\{v1,v2,...\}]$

في الجدول الآتي نضع أمثلة لتفاضلات بعض الدوال

التفاضلة بلغة ماتيماتيكا	التفاضلة بلغة الرياضيات
In[33]:=Dt[f[x]] Out[33]=Dt[x] f'[x]	$df = f'(x) dx$
In[34]:= Dt[x^n] Out[34]= $n x^{n-1} Dt[x] + x^n Dt[n] Log[x]$	$dx^n = nx^{n-1} dx + x^n Log[x] dn$
In[35]:=Dt[x^n, Constants->{n}] Out[35]= $n x^{n-1} Dt[x, Constants->{n}]$	$dx^n = nx^{n-1} dx$ حيث n ثابت
In[36]:=Dt[f[x,y]] Out[36]= Dt[y] f ^(0,1) [x,y] + Dt[x] f ^(1,0) [x,y]	$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$
In[37]:= Dt[x^2 Sin[y]+y^2,y] Out[37]= $2y + x^2 Cos[y] + 2x Dt[x,y] Sin[y]$	$\frac{d}{dy} (x^2 \sin(y) + y^2) = 2y + x^2 \cos(y) + 2x \sin(y) \frac{dx}{dy}$
In[38]:=Dt[x^2+y^2+z^2,x] Out[38]= $2x + 2y Dt[y,x] + 2z Dt[z,x]$	$\frac{d}{dx} (x^2 + y^2 + z^2) = 2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2z \frac{dz}{dx}$
In[39]:= Dt[x^2+y^2+z^2,x, Constants->{z}] Out[39]= $2x + 2y Dt[y,x, Constants->{z}]$	$\frac{d}{dx} (x^2 + y^2 + z^2) = 2x + 2y \frac{dy}{dx}$ حيث z ثابت

٤ . التكامل Integration

برنامج ماتيماتيكا قادر على حساب أنواع عديدة من التكاملات لتعبيرات رياضية تتحوى على كثيرات الحدود والدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية ... الخ ، ونتائج التكامل يكون في صورة رمزية ويمكن حساب التكاملات المتعددة (الثنائية والثلاثية ... الخ) وكذلك التكاملات المحدودة سواء كان حدود التكامل أعداد ثابتة أو دوال ويتم ذلك باستخدام الأمر **Integrate** كالآتي:

الصيغة العامة للأمر في ماتيماتيكا	الوظيفة التي يقوم بها الأمر
Integrate[f,x]	حساب التكامل $\int f \, dx$
Integrate[f,{x,x0,x1}]	حساب التكامل المحدود $\int_{x0}^{x1} f \, dx$
Integrate[f,{x,x0,x1},{y, y0,y1}]	حساب التكامل الثنائي $\int_{x0}^{x1} \int_{y0}^{y1} f \, dy \, dx$
Integrate[f,{x,x0,x1},{y, y0,y1},...]	حساب التكامل $\int_{x0}^{x1} \int_{y0}^{y1} \dots f \, dy \, dx$

في الجدول الآتي نضع أمثلة لتكامل بعض الدوال

التكامل بلغة ماتيماتيكا	التكامل بلغة الرياضيات
In[1]:=Integrate[x^n,x] Out[1]= $\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\int x^n dx$
In[2]:=Integrate[x^n,n] Out[2]= $\frac{x^n}{\text{Log}[x]}$	$\int x^n dn$
In[3]:=Integrate[1/x,x] Out[3]=Log[x]	$\int \frac{1}{x} dx$
In[4]:=Integrate[Log[x],x] Out[4]= -x + x Log[x]	$\int \text{Log}(x) dx$
In[5]:=Integrate[x^3 Exp[x],x] Out[5]= E^x (-6 + 6 x - 3 x^2 + x^3)	$\int x^3 e^x dx$
In[6]:=Integrate[1/(x^2+1),x] Out[6]=ArcTan[x]	$\int \frac{1}{x^2+1} dx$
In[7]:=Integrate[1/Sqrt[1-x^2],x] Out[7]=ArcSin[x]	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

٥. المعادلات التفاضلية Differential Equations

المعادلة التفاضلية هي معادلة تربط بين المتغيرات المستقلة والداالة التابعة ومشتقات هذه الداالة ، وإذا كانت المعادلة التفاضلية تحتوي على متغير مستقل واحد فإنها تسمى معادلة تفاضلية عادية Ordinary Differential Equation (ODE) وإذا كانت المعادلة تحتوي على متغيرين مستقلين أو أكثر فإنها تسمى معادلة تفاضلية جزئية (Partial Differential Equation PDE) .

ورتبة Order المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى مشتقة موجودة بالمعادلة بينما درجة Degree المعادلة التفاضلية هي الأس المرفوع إليه المشتقة ذات أكبر رتبة . وفي الجدول الآتي نضع بعض الأمثلة للمعادلات التفاضلية .

الدرجة Degree	الرتبة Order	معادلات تفاضلية عادية (ODE)
الدرجة الأولى	الرتبة الأولى	$\frac{dy}{dx} = x + 5$
الدرجة الأولى	الرتبة الثانية	$\frac{d^2 y}{d x^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = x$
الدرجة الثانية	الرتبة الأولى	$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + y = x$
الدرجة الثانية	الرتبة الثانية	$\left(\frac{d^2 y}{d x^2} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + 3y = x^2$
الدرجة الأولى	الرتبة الثالثة	$y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos(x)$

الدرجة Degree	الرتبة Order	معادلات تفاضلية جزئية (PDE)
الدرجة الأولى	الرتبة الأولى	$\frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = f$
الدرجة الأولى	الرتبة الثانية	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y^2$

يقال للمعادلة التفاضلية (عادية ODE أو جزئية PDE) أنها معادلة تفاضلية خطية **Linear Differential Equation** إذا كان كل متغير تابع وكذلك المشتقات الموجودة بالمعادلة جميعها من الدرجة الأولى وأيضا المعادلة التفاضلية لا تحتوي على حواصل ضرب لمتغيرات تابعة أو مشتقات أو خليط من حاصل ضربيهما ، وإذا لم تكن المعادلة التفاضلية خطية فإنها تسمى معادلة تفاضلية غير خطية ، والمعادلة التفاضلية تسمى مسألة القيمة الابتدائية **Initial Value Problem** إذا كان الحل يحقق شروط ابتدائية معطاة

ويستطيع برنامج ماتيماتكا إيجاد حل أنواع متعددة من المعادلات التفاضلية وذلك بواسطة الأمر **Dsolve** كالآتي :

حل المعادلة التفاضلية eqn وإيجاد المتغير التابع y[x] بدلالة المتغير المستقل x

DSolve[eqn, y[x], x]

المعادلة التفاضلية بلغة ماتيماتيكا	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
In[1]:=DSolve[y'[x]==y[x],y[x],x] Out[1]={{y[x] -> E^x C[1]}}	$\frac{dy}{dx} = y$
In[2]:=DSolve[y'[x]==Cos[x],y[x],x] Out[2]={{y[x] -> C[1] + Sin[x]}}	$\frac{dy}{dx} = \cos(x)$
In[3]:=DSolve[y'[x]+(1/x)y[x]==1,y[x],x] Out[3]={{y[x] -> $\frac{x}{2} + \frac{C[1]}{x}$}}	$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = 1$
In[4]:=DSolve[{y'''[x]+y[x]==x^2 - x+2}, y[x],x] Out[4]= {{y[x] -> -x + x² + C[2] Cos[x] - C[1] Sin[x]}}	$y''' + y = x^2 - x + 2$
In[5]:= DSolve[x^2y''[x]-2x y'[x]+2y[x] == x^4 Exp[x],y[x],x] Out[5]= {{y[x] -> x (-2 E^x + E^x x + C[1] + x C[2])}}	$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = x^4 e^x$

$\frac{d^3 y}{d x^3} + 3 \frac{d^2 y}{d x^2} - 4y = x e^{-2x}$	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
In[6]:= DSolve[y'''[x]+3y''[x]-4y[x]==x Exp[-2x],y[x],x] Out[6]= $\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow -\frac{1}{18} (x^2 + x^3) e^{-2x} + (C[1] + x C[2]) e^{-2x} + e^x C[3] \right\} \right\}$	المعادلة التفاضلية بلغة ماتيماتيكا

$\frac{d^4 y}{d x^4} + 2 \frac{d^3 y}{d x^3} - 3 \frac{d^2 y}{d x^2} = 3e^{2x} + 4\sin(x)$	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
In[7]:= DSolve[y''''[x]+2y'''[x]-3y''[x]==3Exp[2x]+4Sin[x],y[x],x] Out[7]= $\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{C[1]}{e^{2x}} + C[2] + x C[3] + e^x C[4] + \frac{1}{180} (27e^{2x} + 72 \cos[x] + 144 \sin[x]) \right\} \right\}$	المعادلة التفاضلية بلغة ماتيماتيكا

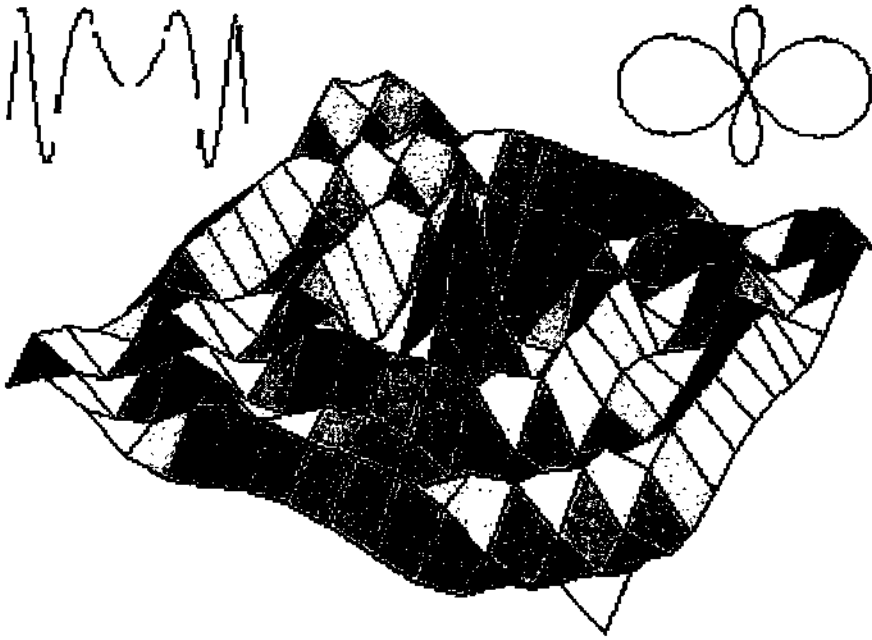
$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - 9)y = 0$ <p style="text-align: center;">معادلة بيسل Bessel Equation</p>	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
In[8]:= DSolve[x^2 y''[x]+x y'[x]+(x^2-9) y[x]==0,y[x],x] Out[8]= {y[x] -> BesselY[3, x] C[1] + BesselJ[3, x] C[2]}	المعادلة التفاضلية بلغة ماتيماتيكا

حل المعادلة التفاضلية eqn والتي تحقق الشرط الابتدائي $y[x_0]=a$

`DSolve[{eqn,y[x0]==a}, y[x], x]`

المعادلة التفاضلية بلغة ماتيماتيكا	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
<code>In[9]:=DSolve[{y'[x]==y[x],y[0]=3},y[x],x]</code> <code>Out[9]={{y[x]->3 E^x}}</code>	$\frac{dy}{dx} = y$, $y[0]=3$
<code>In[10]:=</code> <code>DSolve[{y'[x]==Cos[x],y[0]==2},y[x],x]</code> <code>Out[10]={{y[x]->2 + Sin[x]}}</code>	$\frac{dy}{dx} = \cos(x)$, $y[0]=2$
<code>In[11]:=</code> <code>DSolve[{y'[x]+(2/x)y[x]==y[x],</code> <code>y[1]==-2},y[x],x]</code> <code>Out[11]= {{y[x]->-Sqrt[$\frac{18}{5x^4} + \frac{2x}{5}$]]}}</code>	$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = y$, $y[1]=-2$
<code>In[12]:=</code> <code>DSolve[{y''[x] - 3y'[x]+2y[x]==Exp[x] +</code> <code>Exp[2x],y[0]==1,y'[0]==1},y[x],x]</code> <code>Out[12]={{y[x]->E^x - E^x x + E^{2x} x}}</code>	$\frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = e^x + e^{2x}$ $y[0]=1$, $y'[0]=1$

الباب الخامس ماثيماتيكاً ورسم الدوال



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكاً
والخاصة بالموضوعات الآتية :

١. رسم الدوال فى المستوى Two-Dimensional Plotting
٢. رسم الدوال فى الفراغ Three-Dimensional Plotting
٣. رسم الدوال البارامترية Parametric Plots

الباب الخامس

ماثيماتيكاً ورسم الدوال

يستطيع برنامج ماثيماتيكاً أداء دور كبير فى عمليات رسم الدوال فى المستوى والفراغ وكذلك الدوال فى الصورة البارامترية ولتنفيذ عملية رسم الدوال فى ماثيماتيكاً نحتاج الى تحديد ثلاث أشياء أساسية هى :

- تعريف الدالة المطلوب رسمها
- تعريف المتغير المستقل Independent variable
- تعريف نطاق المتغير المستقل Domain

ويحتوى ماثيماتيكاً على العديد من الاختيارات Options التى تتحكم فى شكل ومواصفات الرسم graph وبعض هذه الاختيارات يكون فعال Default بمعنى أن ماثيماتيكاً يقوم بتنفيذها أوتوماتيك Automatic عند بداية التشغيل فمثلاً الاختيارات

- تحديد مقياس رسم مناسب scale
- تحديد عدد النقاط التى يتم حساب قيم الدالة عندها
- اختيار المدى Range للمتغير التابع Dependent variable
- تحديد وترقيم محاور الإحداثيات

تعتبر من الاختيارات الفعالة فى ماثيماتيكاً وكل اختيار له اسم محدد ويمكن للمستخدم تغيير الاختيارات الفعالة فى ماثيماتيكاً وإضافة أى اختيارات أخرى حسب طبيعة الرسم المطلوب .

١. رسم الدوال في المستوى Two-Dimensional Plotting

الدالة ذات المتغير الواحد يرمز لها $y = f(x)$ حيث x يسمى بالمتغير المستقل ، y يسمى بالمتغير التابع ونطاق الدالة يقع على محور x والمدى يقع على محور y وترسم الدالة في المستوى ويمثلها مجموعة النقط (x,y) في المستوى التي تحقق $y = f(x)$ ، ومن أهم أوامر رسم الدوال في ماتيماتيكا هو الأمر Plot وله الصيغة العامة الآتية :

Plot[f, {x, xmin, xmax}]

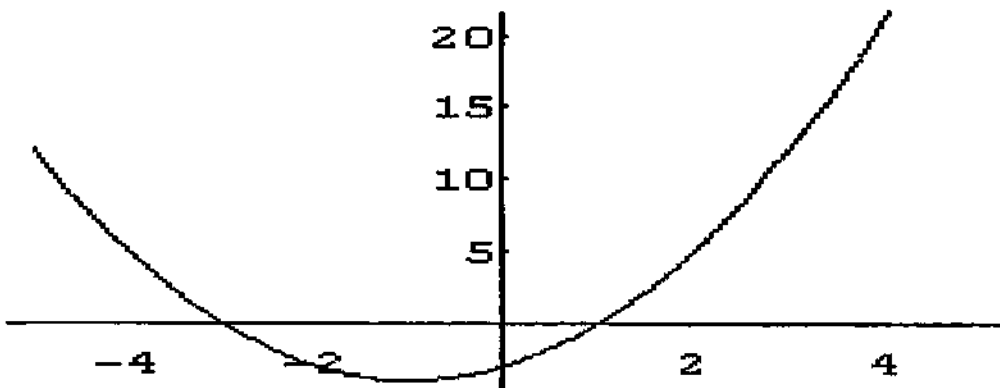
رسم الدالة f كدالة في المتغير x في النطاق من $x = \text{xmin}$ الى $x = \text{xmax}$

Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}]

رسم مجموعة دوال $f1, f2, \dots$ في المتغير x في النطاق من $x = \text{xmin}$ الى $x = \text{xmax}$

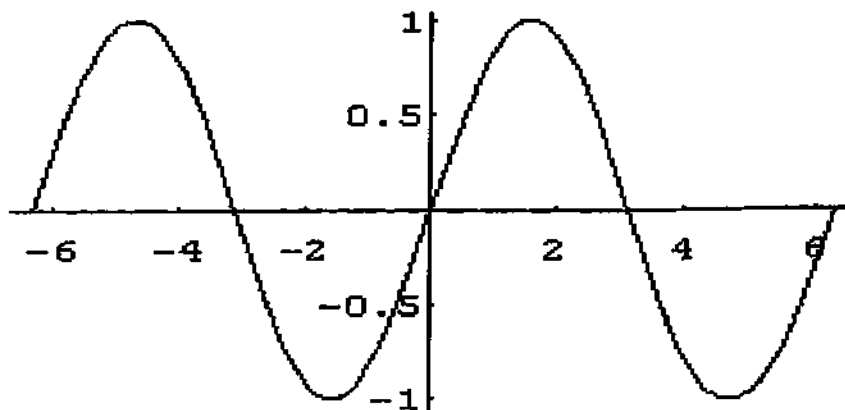
والناتج من تنفيذ أمر Plot يكون صورة مرسومة " Graphics Object " للدالة أو مجموعة الدوال المعطاة وفقا للاختيارات الفعالة .

رسم الدالة $x^2 + 2x - 3$ في الفترة $[-5, 5]$ **In[1]:=Plot[x^2+2x-3,{x,-5,5}]**



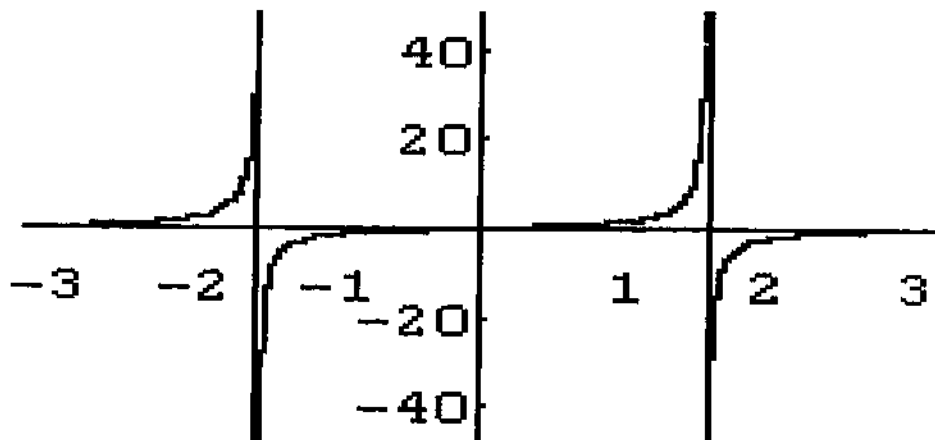
Out[1]:-Graphics-

رسم الدالة $\sin x$ في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$ `In[2]:= Plot[Sin[x],{x,-2Pi,2Pi}]`

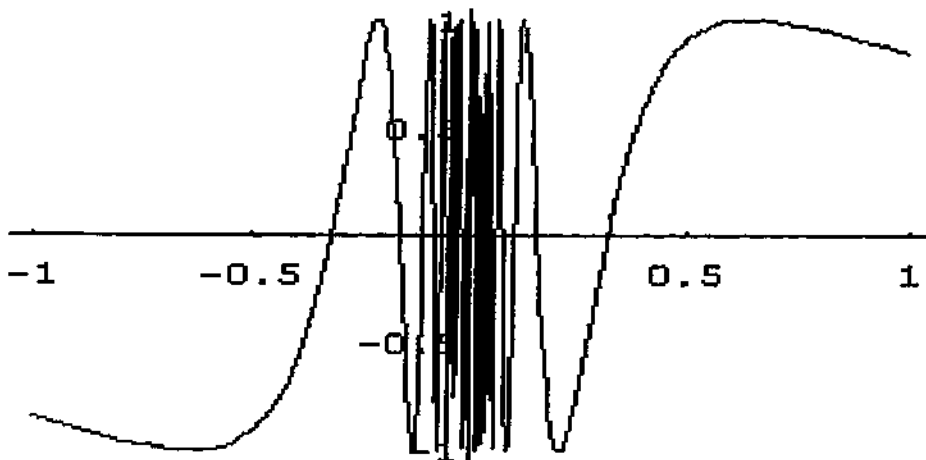


والأمر `Plot` في ماتيماتيكا قادر على رسم دوال لها نقاط شاذة في نطاق التعريف حيث يقوم ماتيماتيكا باختيار مقياس رسم مناسب .

رسم الدالة $\tan(x)$ في الفترة $[-3, 3]$ `In[3]:= Plot[Tan[x],{x,-3,3}]`

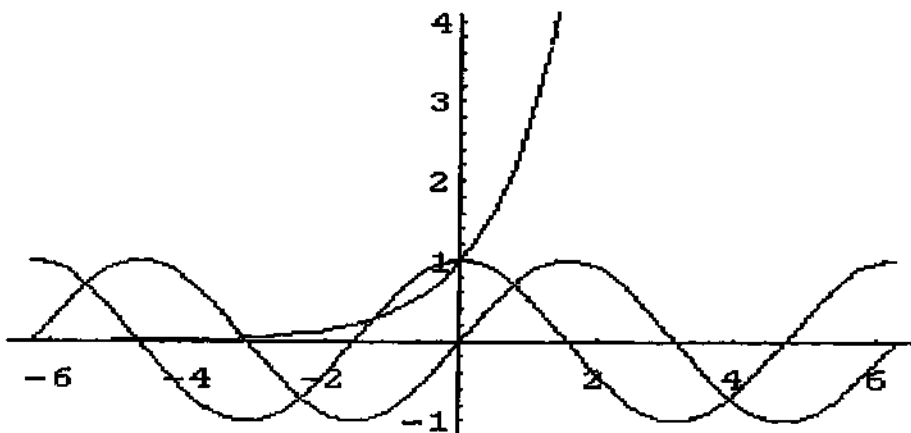


In[4]:=Plot[Sin[1/x],{x,-1,1}] الدالة $\sin(1/x)$ لها نقطة شاذة عند $x=0$

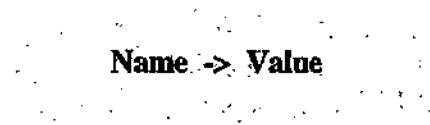


In[5]:=Plot[{Sin[x],Cos[x],Exp[x]},{x,-2Pi,2Pi}]

لرسم مجموعة من الدوال على نفس النطاق



ونلاحظ في الأمثلة السابقة انه تم رسم الدوال بدون إضافة أي اختيارات **Options** الى أمر الرسم **Plot** بمعنى أن الرسوم تم تنفيذها بالاختيارات الفعالة **default** الموجودة داخل ماتيماتكا ، ولكن كان من الممكن إضافة أي اختيارات للرسم حيث أن كل اختيار له اسم **Name** ويأخذ قيمة **Value** ويتم وضع الاختيار **Option** داخل أمر الرسم **Plot** في صورة قاعدة



ويمكن وضع أكثر من اختيار داخل أمر الرسم **Plot** بحيث يفصل كل منها علامة الفاصلة " , " ومن القيم **Value** المستخدمة في هذه الاختيارات

وتعني أن يتم الاختيار أوتوماتيك وفقا لأسلوب ماتيماتكا	Automatic
وتعني عمل كل ما هو متاح من ماتيماتكا في هذا الاختيار	All
وتعني عدم استخدام ما هو متاح من ماتيماتكا في هذا الاختيار	None
وتعني تنفيذ الاختيار	True
وتعني عدم تنفيذ الاختيار	False

وفي حالة عدم تحديد قيمة خاصة لاختيار ما للأمر **Plot** فإن ماتيماتكا يقوم أوتوماتيك باستخدام القيمة الفعالة لهذا الاختيار وبصفة عامة يمكن الاستعلام عن القيم الفعالة للاختيارات المتاحة لدالة **function** باستخدام الأمر **Option** في الصورة

Option[function]

للتعرف على القيم الفعالة للاختيارات الخاصة بالأمر `Plot` `In[6]:=Option[Plot]`

```
Out[6]={ AspectRatio -> GoldenRatio^(-1), Axes -> Automatic,
AxesLabel -> None, AxesOrigin -> Automatic, AxesStyle ->
Automatic, Background -> Automatic ColorOutput ->
Automatic, Compiled -> True, DefaultColor -> Automatic, Epilog
-> {}, Frame -> False, FrameLabel -> None, FrameStyle ->
Automatic, FrameTicks -> Automatic, GridLines -> None,
MaxBend -> 10. PlotDivision->20., PlotLabel -> None, PlotPoints
-> 25, PlotRange -> Automatic, PlotRegion -> Automatic,
PlotStyle -> Automatic, Prolog -> {}, RotateLabel -> True, Ticks
-> Automatic, DefaultFont :-> $DefaultFont, DisplayFunction :->
$DisplayFunction }
```

وإذا تم تحديد قيم خاصة لاختيارات دالة `function` وأردنا استخدام هذه القيم الجديسة أكثر من مرة بعد ذلك فإنه يمكن جعلها قيم فعالة باستخدام الأمر `SetOptions` في الصورة

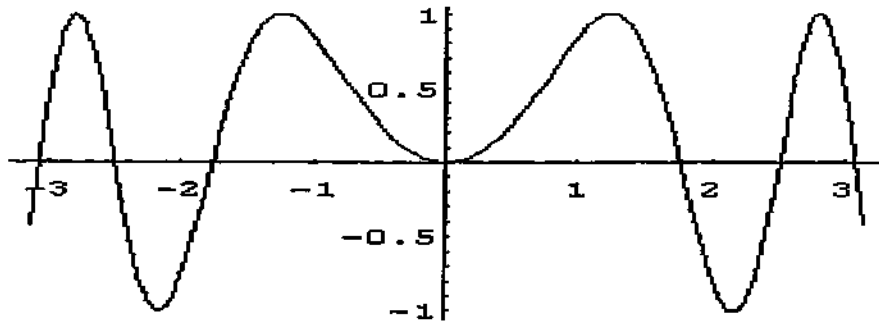
`SetOptions[function,Name1->value1,Name2->value2,...]`

وسوف نتعرف الآن على بعض الاختيارات `Options` المستخدمة مع الأمر `Plot` والقيم الفعالة لكل منها وقيم أخرى بديلة للتحكم في مواصفات الرسم وكيفية تغيرها .

Option Name اسم الاختيار Default value وقيمة الفعالة	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار Another values
PlotRange -> Automatic	تحديد مدى الإحداثيات التي يتم التعامل معها في الرسم	PlotRange -> {ymin,ymax} PlotRange->{{xmin,xmax}, {ymin,ymax}} PlotRange -> All
PlotLabel -> None	كتابة عنوان على الرسم	PlotLabel -> "expr" حيث "expr" تعني أي عنوان يتم كتابته على الرسم
Frame -> False	إمكانية عمل إطار حول الرسم	عمل إطار حول الرسم Frame -> True
FrameLabel -> None	إمكانية كتابة عنوان على الإطار حول الرسم	FrameLabel -> "graph(1)" كتابة العنوان graph(1) على الإطار حول الرسم
AxesOrigin -> Automatic	تحديد نقطة الأصل	AxesOrigin -> {x0,y0} تحديد النقطة (x0,y0) كنقطة أصل
Axes -> Automatic	رسم محاور الإحداثيات	Axes -> None عدم رسم محاور للإحداثيات
AxesLabel -> None	كتابة عناوين على المحاور	AxesLabel -> {"y-axes"} كتابة العنوان y-axes على محور y فقط AxesLabel -> {"x-label", "y-label"} كتابة العنوان x-label على محور x والعنوان y-label على محور y
GradLines -> None	لعمل رسم شبكي يحتوي بداخله على رسم الدالة	GradLines -> Automatic

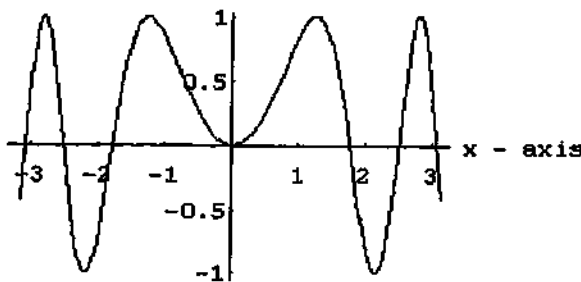
Option Name اسم الاختيار	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار Another values
Default value قيمته الفعالة		
AspectRatio -> 1 GoldenRatio GoldenRatio $\equiv 1.61803$	تثل نسبة واجهة الرسم وهي النسبة بين ارتفاع وعرض الرسم	AspectRatio-> Automatic AspectRatio->n اختيار عدد n يمثل النسبة بين ارتفاع وعرض منطقة الرسم
Ticks -> Automatic	ترقيم محاور الإحداثيات	Ticks -> None عدم ترقيم اشار Ticks -> {Automatic, None} ترقيم محور x فقط Ticks -> {None, Automatic} ترقيم محور y فقط
Plot Points -> 25	اختيار عدد n يمثل عدد النقط في العينة والتي يتم حساب قيم الدالة عندها	Plot Points -> n
MaxBend -> 10	اختيار عدد n يمثل أكبر زاوية التواء بين القطع المتعاقبة على المنحنى	MaxBend -> n
PlotDivison -> 20	أكبر معامل يتم به تقسيم الفترة المعطاة إلى فترات جزئية	PlotDivison -> n اختيار عدد n يمثل أكبر تقسيم ممكن من الفترات الجزئية للفترة المعطاة
Background -> Automatic	اختيار لون خلفية الرسم	Background -> GrayLevel[x] جعل الخلفية باللون الرمادي بمستوى تلوين x يتراوح بين 0,1
DisplayFunction-> \$DisplayFunction	إظهار رسم الدالة	DisplayFunction-> Identity منع ظهور رسم الدالة

In[7]:= Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi}] رسم الدالة $\sin x^2$ في الفترة $[-\pi, \pi]$



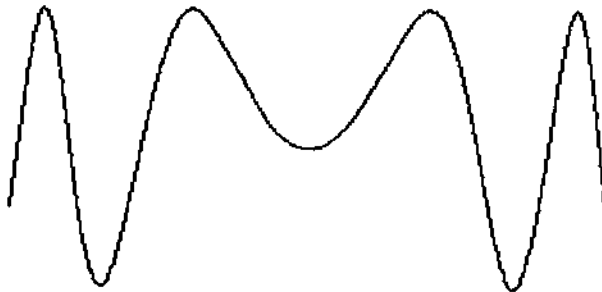
In[8]:=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi}, AxesLabel->{"x - axis","y - axis"}]

y - axis



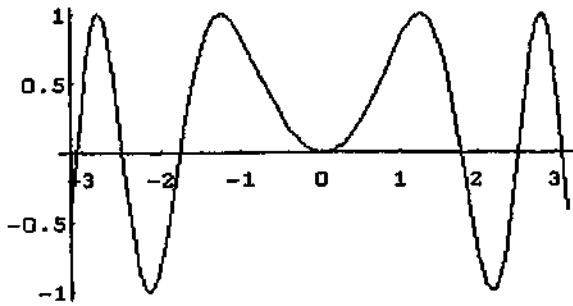
ولوضع العنوان
على المحور الأفقي والعنوان
" y - axis " على المحور الرأسي

In[9]:= Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},Axes->None]



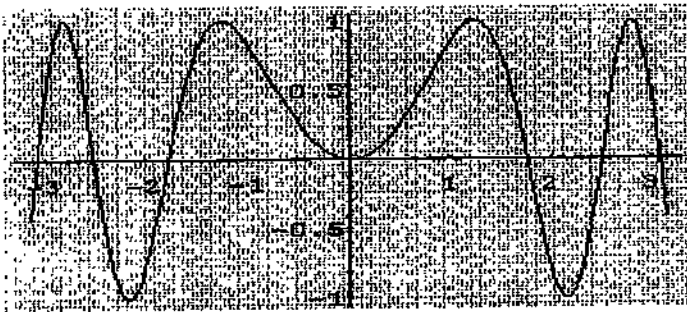
رسم الدالة $\sin x^2$ في
الفترة $[-\pi, \pi]$ وحذف
المحاور من الرسم

In[10]:=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi}, AxesOrigin->{-Pi,0}]



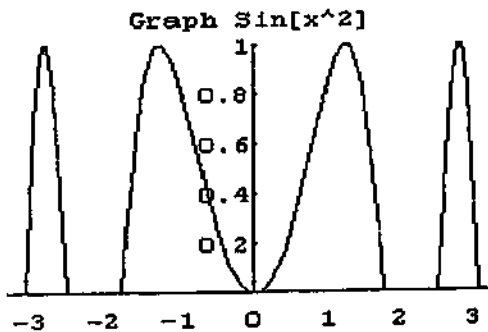
لرسم الدالة $\sin x^2$ في
الفترة $[-\pi, \pi]$ وجعل
نقطة الأصل هي النقطة
 $(-\pi, 0)$

In[11]:=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},Background->GrayLevel[0.5]]



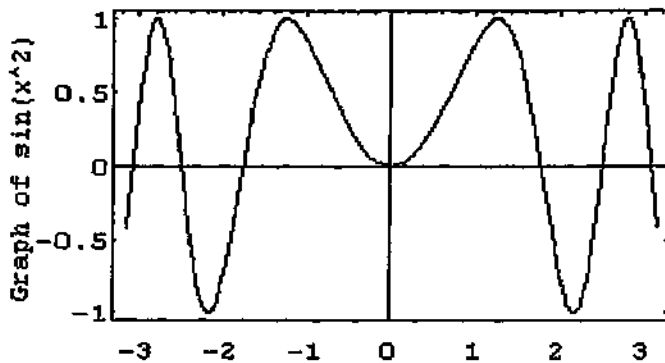
لرسم الدالة $\sin x^2$
في الفترة $[-\pi, \pi]$ مع
جعل خلفية الرسم
باللون الرمادي

**In[12]:=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},PlotRange->{0,1},
PlotLabel->"Graph Sin[x^2]"]**



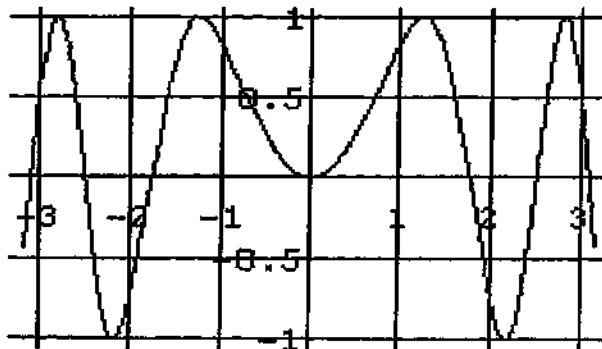
لرسم الدالة $\sin x^2$
في الفترة $[-\pi, \pi]$
وفي المدى من 0 الى 1
وكتابة عنوان على الرسم

**In[13]:= Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},Frame->True,
FrameLabel->"Graph of sin(x^2)"]**



رسم الدالة $\sin x^2$
في الفترة $[-\pi, \pi]$
مع عمل إطار خارجي
حول الرسم وكتابة
عنوان على هذا الإطار

In[14]:=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},GridLines->Automatic]



رسم الدالة $\sin x^2$
في الفترة $[-\pi, \pi]$
مع عمل خطوط شبكية
على الرسم

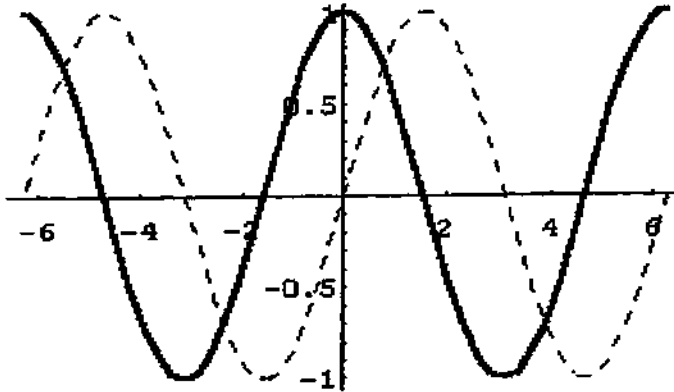
وفي برنامج ماتيماتكا يمكن استخدام الرسوم الأولية في توضيح النقط والخطوط والمنحنيات بأساليب مختلفة **different styles** ويتم ذلك بواسطة الاختيار **PlotStyle** مع الأمر **Plot** وقيمته الفعالة **Automatic** ويمكن إعطاء قيم أخرى للاختيار **PlotStyle** كالآتي :

PlotStyle->style	تحديد الأسلوب style لرسم جميع المنحنيات للدوال الموجودة بالأمر Plot
PlotStyle->{{style1},{style2},...}	تحديد الأساليب style1, style2, ... للاستخدام بصورة دورية مع منحنيات الدوال الموجودة في الأمر Plot فمنحنى الدالة الأولى يرسم بالأسلوب style1 ومنحنى الدالة الثانية يرسم بالأسلوب style2 ... الخ

ونعرض الآن بعض الأساليب styles الموجودة في ماتيماتكا ووظيفة كلا منها .

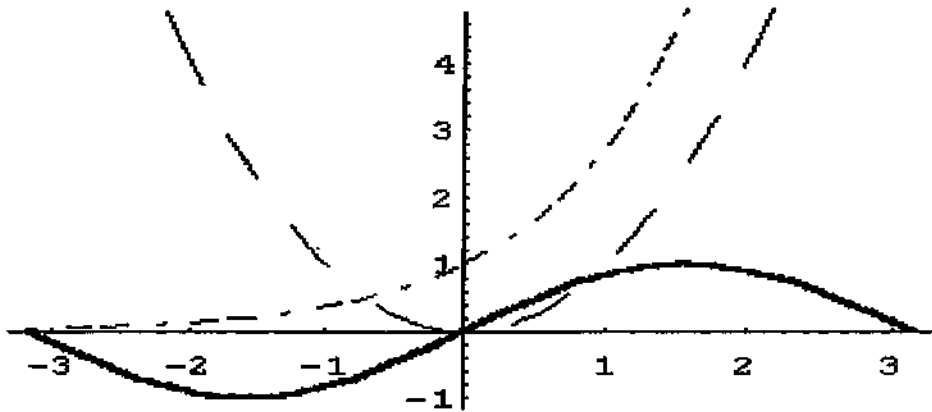
الأسلوب style	الوظيفة
Thickness[x]	رسم المنحنى بحيث يكون سمك الخط المستخدم يساوى x حيث x تمثل كسر من العرض الكلى للرسم فمثلا لجعل الخط كثيف Thickness[0.05]
Dashing[{d}]	رسم المنحنى متقطع بأجزاء متعاقبة طولها d حيث d تمثل كسر من العرض الكلى للرسم ، فمثلا لرسم المنحنى متقطع بالصورة — يكتب Dashing[{0.25}]
Dashing[{d1,d2,d3,...}]	رسم المنحنى متقطع بأجزاء متعاقبة طولها d1,d2,... وبصورة دورية حيث كلا من di يمثل كسر من العرض الكلى للرسم
GrayLevel[x]	رسم المنحنى باللون الرمادى بمستوى تلوين x يتراوح بين 0 و 1 حيث <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div>GrayLevel[0]</div> <div>لون اسود black</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div>GrayLevel[1]</div> <div>لون ابيض white</div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div>GrayLevel[0.5]</div> <div>لون رمادى gray</div> </div>
RGBColor[r,g,b]	رسم المنحنى ملون حيث r,g,b تمثل الألوان الأحمر red والأخضر green والأزرق blue على الترتيب وكل منها يأخذ قيم بين 0 و 1 وفقا لدرجة اللون المطلوب

```
In[15]:= Plot[{Sin[x],Cos[x]},{x,-2Pi,2Pi},
PlotStyle->{Dashing[{0.02}],Thickness[0.007]]}]
```



رسم منحنى الدالتين
 $\sin x$, $\cos x$
 على نفس النطاق
 $[-2\pi, 2\pi]$
 وبحيث يكون منحنى
 $\sin x$ متقطع ومنحنى
 $\cos x$ سميك

```
In[16]:=Plot[{x^2,Sin[x],Exp[x]},{x,-Pi,Pi},PlotStyle->{{Dashing[{0.08}]},
{Thickness[0.007]},{Dashing[{0.01,0.03,0.03}]}}]
```



رسم الدالة x^2 على صورة خطوط متقطعة
 ورسم الدالة $\sin x$ بخط سميك
 ورسم الدالة e^x على صورة خطوط متقطعة ونقط
 والدوال الثلاثة مرسومة على نفس النطاق

ويمكن استخدام الرسوم الأولية **graphics primitives** لتحديد شكل محاور الإحداثيات في الرسم الناتج ويتم ذلك باستخدام الاختيار **AxisStyle** مع أمر الرسم **Plot** وقيمته الفعالة **Automatic** ويمكن إعطاء قيم أخرى للاختيار **AxisStyle** كالآتي :

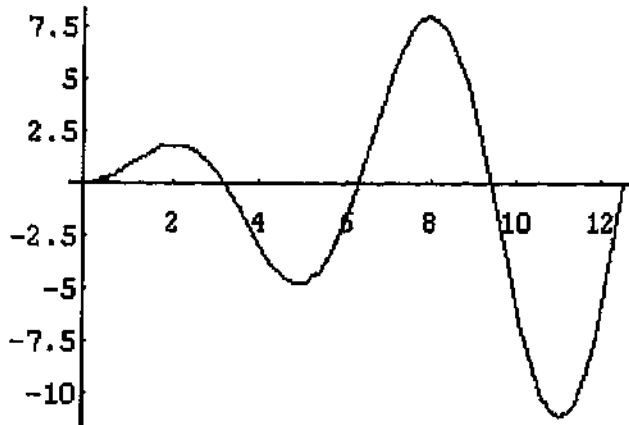
AxisStyle -> style
تحديد الأسلوب style في رسم محاور الإحداثيات
AxisStyle -> {{stylex},{styley}}
تحديد الأسلوب stylex في رسم محور x والأسلوب styley في رسم محور y

ويمكن أيضا استخدام الرسوم الأولية **graphics primitives** لتحديد شكل الإطار المرسوم حول الرسم ويتم ذلك باستخدام الاختيار **FrameStyle** مع أمر الرسم **Plot** وقيمته الفعالة **Automatic** ويمكن إعطاء قيم أخرى للاختيار **FrameStyle** كالآتي :

FrameStyle -> style
تحديد الأسلوب style في رسم الأوجه الأربعة للإطار
FrameStyle -> {{xpstyle},{ypstyle},{ xnstyle},{ ynstyle}}
تحديد أربعة أساليب لرسم الأوجه الأربعة للإطار مبتدأ من الوجه الأفقي السفلي ويرسم بالأسلوب xpstylex والأوجه الباقية ترسم بالأساليب الباقية حسب دوران عقارب الساعة

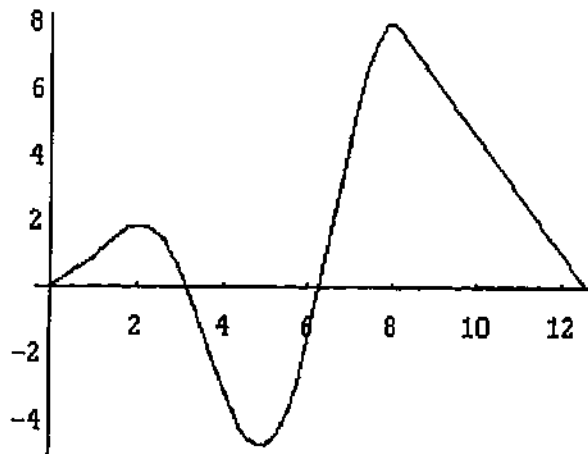
وفي ماتيماتيكاً يقوم الأمر **Plot** في البداية بحساب قيم الدالة عند عينة من النقاط المتساوية البعد ويتم تحديد عدد النقاط في العينة بواسطة الاختيار **PlotPoints** وقيمته الابتدائية الفعالة هي 25 ثم يقوم الأمر **Plot** بعد ذلك بأخذ عينات إضافية من النقاط لعمل منحنى بحيث تكون زاوية الالتواء **bend** بين الأجزاء المتعاقبة على المنحنى اقل من القيمة الابتدائية الفعالة الموجودة في الاختيار **MaxBend** وهي 10 ويتم تقسيم الفترة المعطاة الى فترات جزئية عددها (على الأكثر) يساوى القيمة الابتدائية الفعالة الموجودة في الاختيار **PlotDivision** وهي 20 . ويجب مراعاته إذا استخدمنا عدد صغير من النقاط في العينة فإن رسم المنحنى قد يبدو غير مكتمل ويمكن التحقق من ذلك عن طريق زيادة عدد نقط العينة في الاختيار **PlotPoints** .

In[17]:= p1=Plot[x Sin[x],{x,0,4Pi},PlotPoints->30]



عند اخذ 30 نقطة في العينة
في الاختيار PlotPoints
فإن رسم الدالة $x \sin x$
يكون كما هو موضح بالشكل

In[18]:= p2=Plot[x Sin[x],{x,0,4Pi},PlotPoints->4]



عند اخذ 4 نقط فقط في العينة
في الاختيار PlotPoints
فإن رسم الدالة $x \sin x$ يبدو
غير مكتمل كما هو موضح بالشكل

ويمكن التعرف على المعلومات التي يقوم ماثميكا بحسابها عند تنفيذ أمر **Plot** لرسم الدالة وذلك باستخدام الأمر **InputForm** في الصورة

للتعرف على البيانات التي ينفذها ماثميكا على **expr** **InputForm [expr]**

فمثلا للتعرف على البيانات التي ينفذها ماثميكا على الرسم **p2** في جملة الإدخال السابقة يرسل الأمر

InputForm [p2]

وبرنامج ماثميكا يقوم بحفظ المعلومات الخاصة بكل رسم يتم تنفيذه بحيث يمكن إعادة الرسم في أي وقت بعد ذلك مع إمكانية تغيير بعض الاختيارات المستخدمة وذلك للنظر الى الرسم بطرق مختلفة كما يمكن عرض أكثر من رسم معا ويتم ذلك باستخدام الأمر **Show** كالآتي :

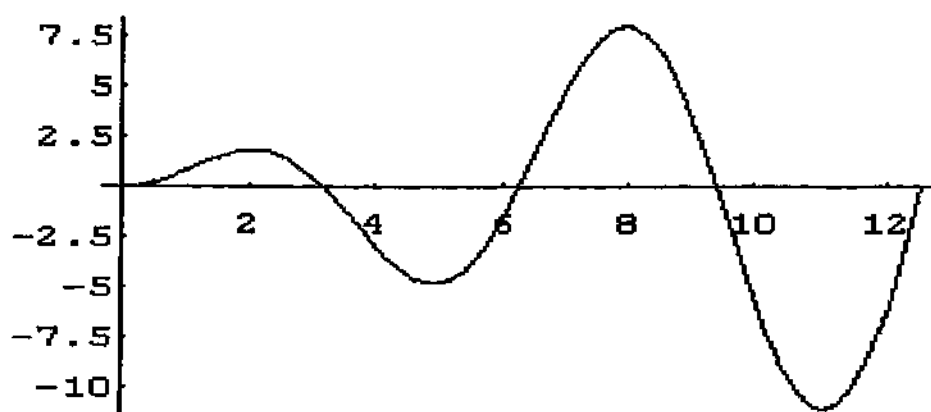
Show[p1]	إعادة عرض الرسم p1 الناتج من Plot
Show[p1,option->value]	إعادة عرض الرسم p1 الناتج من Plot مع تنفيذ الاختيار Option -> value
Show[plot1,plot2,...]	إعادة عرض رسم المنحنيات p1,p2,... الناتجة من Plot معا في رسم واحد

وفي أمر إعادة الرسم **Show** يمكن استخدام اختيارات الأمر **Plot** ما عدا الاختيارات التي تغير من طبيعة وعدد النقاط في العينة المستخدمة لرسم الدالة مثل الاختيارات

PlotStyle , PlotPoints , MaxBand , PlotDivision

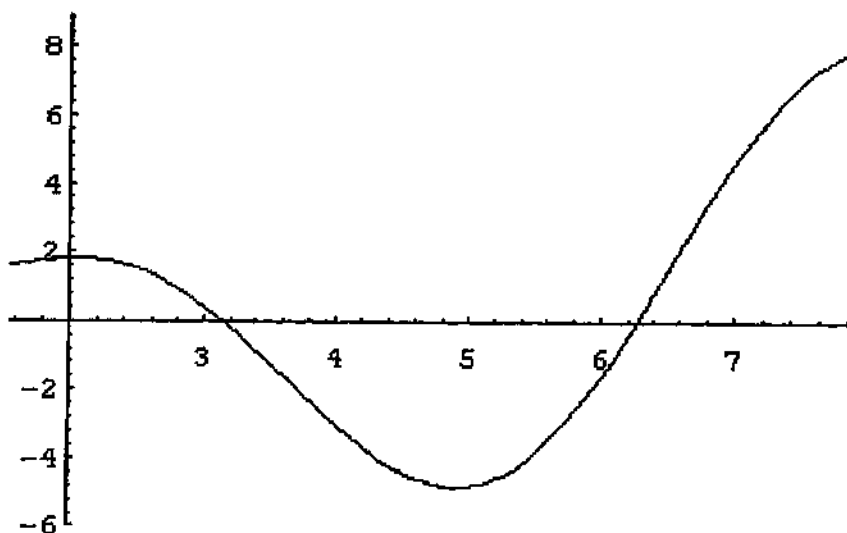
والأمثلة الآتية توضح ذلك .

In[19]:= p3=Plot[x Sin[x],{x,0,4Pi}]

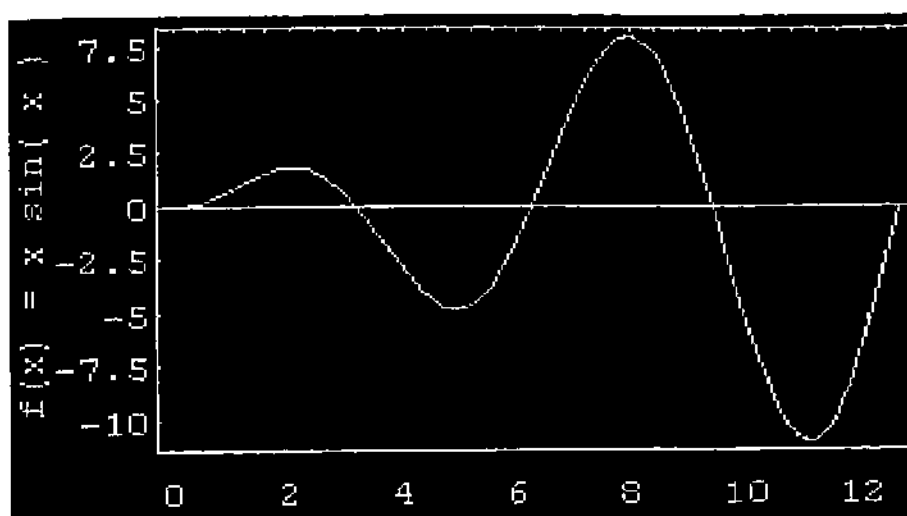


**In[20]:= Show[p3,PlotRange->{{Pi/2,5Pi/2},{-6,9}},
PlotLabel->"** Small Region of the plot f(x)= x sin(x) **"]**

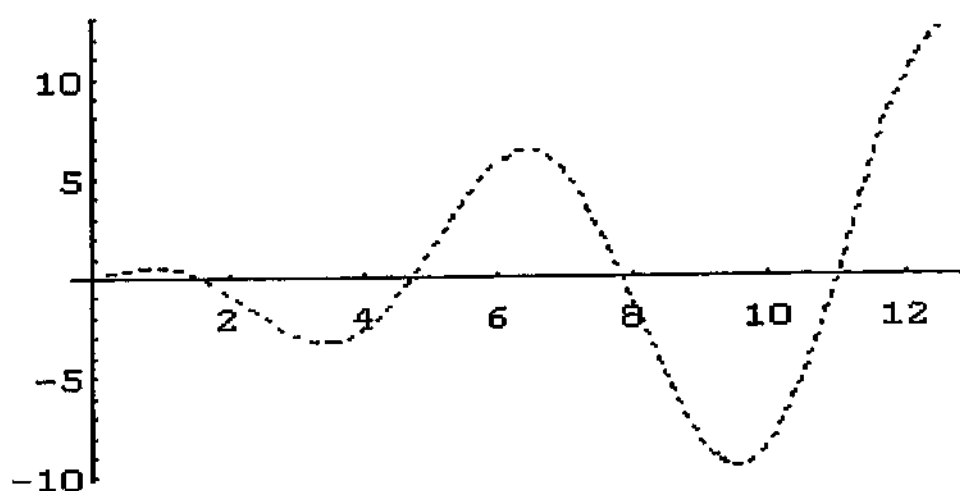
**** Small Region of the plot f(x)= x sin(x) ****



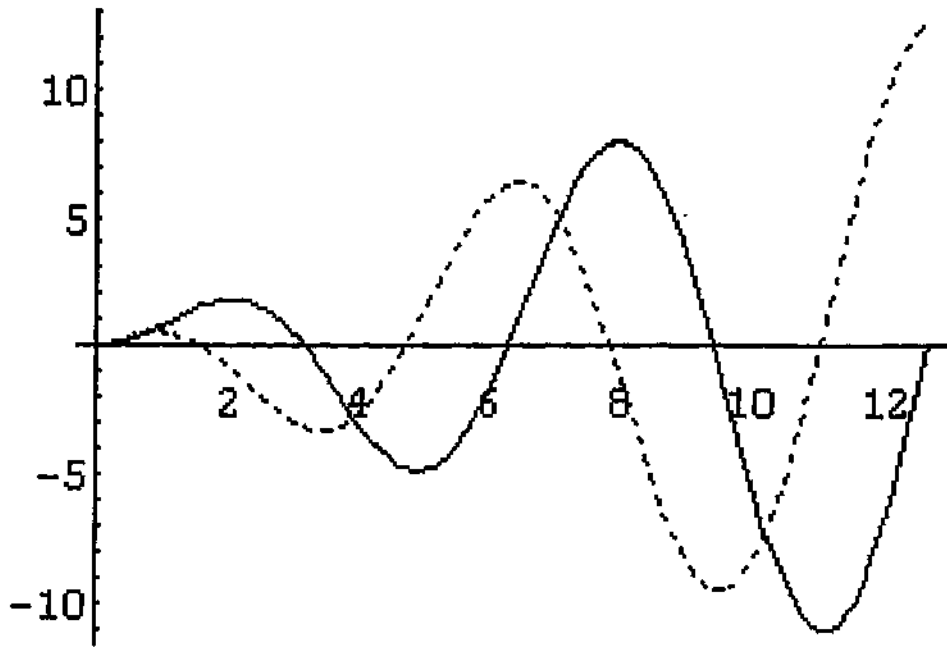
**In[21]:= Show[p3,Frame->True,FrameLabel->" f(x) = x sin(x)",
Background->GrayLevel0]]**



In[22]:= p4=Plot[x Cos[x],{x,0,4Pi},PlotStyle->Dashing[{0.01}]]



In[23]:= Show[p3,p4]



وفي برنامج ماتيماتيكا فإن جميع الرسوم الناتجة من الأمر **Plot** يتم تكوينها من قوائم من الرسوم الأولية **graphics primitives** المناسبة والموجودة داخل بناء ماتيماتيكا وبعد ذلك يتم عرضها بالصورة التي نراها

والجدول التالي يوضح بعض الرسوم الأولية الموجودة داخل بناء ماتيماتيكا .

الرسوم الأولية Graphics Primitives	النتائج
$\text{Point}[\{x,y\}]$	رسم نقطة في المستوى لها الإحداثيات (x,y)
$\text{Line}[\{\{x_1,y_1\},\{x_2,y_2\}\}]$	رسم خط مستقيم يمر بالنقطتين (x_1,y_1) , (x_2,y_2)
$\text{Line}[\{\{x_1,y_1\},\{x_2,y_2\},\{x_3,y_3\},...\}]$	رسم خط منكسر يمر بالنقط المعطاة على الترتيب
$\text{Rectangle}[\{x_{\min},y_{\min}\},\{x_{\max},y_{\max}\}]$	رسم مستطيل إحداثيات رؤوسه على (x_{\min},y_{\min}) , (x_{\max},y_{\max}) أحد القطرين هي
$\text{Polygon}[\{\{x_1,y_1\},\{x_2,y_2\},...\}]$	رسم شكل كثير الأضلاع له الرؤوس المعطاة
$\text{Circle}[\{h,k\},r]$	رسم دائرة مركزها النقطة (h,k) ونصف قطرها r
$\text{Circle}[\{h,k\},\{rx,ry\}]$	رسم قطع ناقص مركزه النقطة (h,k) وطول الجزء المقطوع من محور x يساوي rx وطول الجزء المقطوع من محور y يساوي ry
$\text{Circle}[\{h,k\},r,\{t_1,t_2\}]$	رسم قطاع من دائرة مركزها النقطة (h,k) ونصف قطرها r والقطاع يمتد من الزاوية t_1 الى الزاوية t_2 حيث الزوايا مقاسة بالتقدير الدائري واتجاهها ضد دوران عقرب الساعة

الرسوم الأولية Graphics Primitives	التأسيح
<code>Disk[{h,k},r]</code>	رسم قرص دائري ممتلي مركزه النقطة (h,k) ونصف قطره r
<code>Disk[{h,k},{rx,ry}]</code>	رسم قرص ممتلي على هيئة قطع لاقص مركزه النقطة (h,k) وطول الجزء المقطوع من محور x يساوي rx وطول الجزء المقطوع من محور y يساوي ry
<code>Disk[{h,k},r,{t1,t2}]</code>	رسم قطاع من قرص دائري ممتلي مركزه النقطة (h,k) ونصف قطره r والقطاع يمتد من الزاوية $t1$ الى الزاوية $t2$ حيث الزوايا مقاسه بالتقدير الدائري واتجاهها ضد دوران عقرب الساعة
<code>Text[expr,{x,y}]</code>	كتابة النص <code>expr</code> متمركزا عند النقطة (x,y)
<code>GrayLevel[i]</code>	عرض الأشياء التالية له باللون الرمادي بمستوى تلوين i يراوح بين 0 , 1
<code>RGBColor[r,g,b]</code>	عرض الأشياء التالية له ملونة بمستوى تلوين يراوح بين 0 , 1 للون الأحمر r والأخضر g والأزرق b
<code>PintSize[s]</code>	رسم النقطة التالية في الأمر <code>Plot</code> كمناطق دائرية نصف قطرها s حيث s تمثل كسر من العرض الكلي للرسم
<code>Thickness[t]</code>	رسم الخطوط بسماك t حيث t تمثل كسر من العرض الكلي للرسم
<code>Dashing[{d1,d2,...}]</code>	رسم الخطوط على صورة أجزاء متقطعة أطوالها $d1,d2,...$ على التتابع حيث d_i تمثل كسر من العرض الكلي للرسم

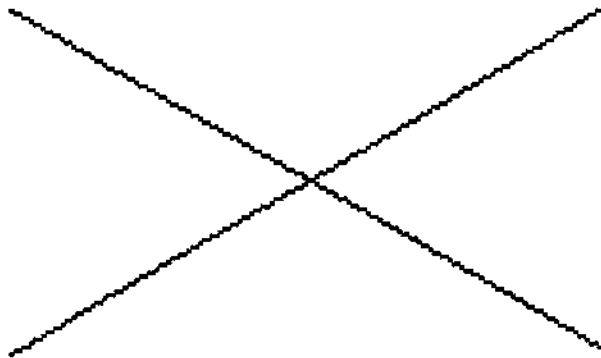
ويمكن للمستخدم التعامل مباشرة مع الرسوم الأولية باستخدام الأمر Graphics كالآتي :

Graphics[primitives,options]

Graphics[{primitive1,primitive2,...}]

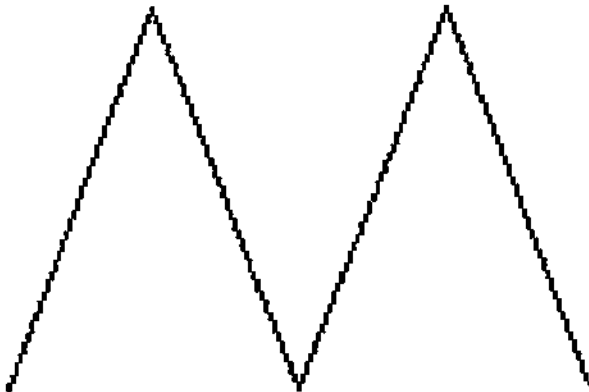
ونائج تنفيذ الأمر Graphics يكون رسالة على الصورة - Graphics - بدون ظهور الرسم ويتم إظهار الرسم باستخدام الأمر Show .

In[24]:= g1=Graphics[{Line[{{-1,-1},{1,1}},Line[{{-1,1},{1,-1}}]]; Show[g1]



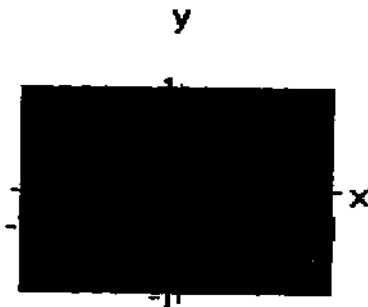
استخدام الأمر Graphics
في رسم خط مستقيم يصل بين
النقطتين $(-1,-1)$ و $(1,1)$
رسم خط مستقيم يصل بين النقطتين
 $(-1,1)$ و $(1,-1)$ ثم إظهار
الرسم باستخدام الأمر Show

In[25]:= g2=Graphics[Line[{{0,0},{1,1},{2,0},{3,1},{4,0}}]];Show[g2]



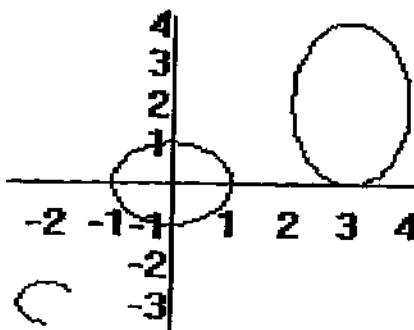
استخدام الأمر Graphics
في رسم خطوط منكسرة تصل
النقط المعطاة
 $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$, $(3,1)$, $(4,0)$
على الترتيب ثم إظهار الرسم
باستخدام الأمر Show

```
In[26]:= g3=Show[Graphics[Rectangle[{-1,-1},{1,1}]],
  Axes->True,AxesLabel->{"x","y"}]
```



رسم مستطيل إحداثيات رؤوس
قطر فيه هي $(-1,-1)$, $(1,1)$
وتم إضافة اختيار عمل محاور
وكتابة العنوان x على المحور
الأفقي والعنوان y على الراسي

```
In[27]:= one=Graphics[Circle[{0,0},1]];two=Graphics[Circle[{3,2},{1,2}]];
three=Graphics[Circle[{-2,-3},.5,{Pi/4,3Pi/2}]];
Show[one,two,three,Axes->True,AspectRatio->1]
```



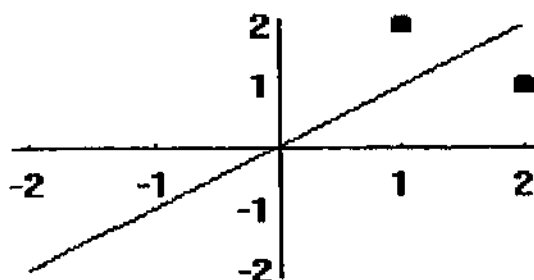
رسم دائرة مركزها النقطة $(0,0)$ ونصف قطرها 1
وقطع ناقص مركزه النقطة $(3,2)$
وقطاع من دائرة مركزها النقطة $(-2,-3)$ ويمتد
من الزاوية $\pi/4$ الى الزاوية $3\pi/2$
ثم إظهار الرسوم الثلاثة معا باستخدام الأمر Show

```
In[28]:= pentagon=Table[N[{Sin[2 n Pi/5],Cos[2 n Pi/5]}],{n,5}];
Show[Graphics[Polygon[pentagon]]]
```



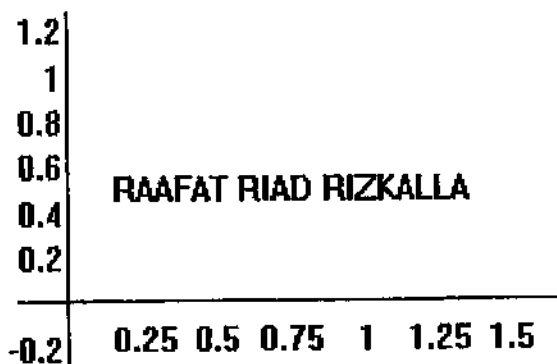
عمل قائمة pentagon تحتوى على
إحداثيات الشكل الخماسي ثم إظهار
الرسم باستخدام الأمر Show

```
In[29]:= Show[Graphics[{Line[{{-2,-2},{2,2}},PointSize[0.03],
Point[{2,1}],Point[{1,2}}]},Axes->True]
```



إظهار رسم الخط المستقيم الواصل بين
النقطتين $(-2,-2)$, $(2,2)$ مع رسم
نقط بالحجم 0.03 عند الإحداثيات
 $(2,1)$, $(1,2)$

```
In[30]:= text1=Graphics[Text[RAAFAT RIAD RIZKALLA, {0.75,0.5}]];
Show[text1,Axes->True]
```



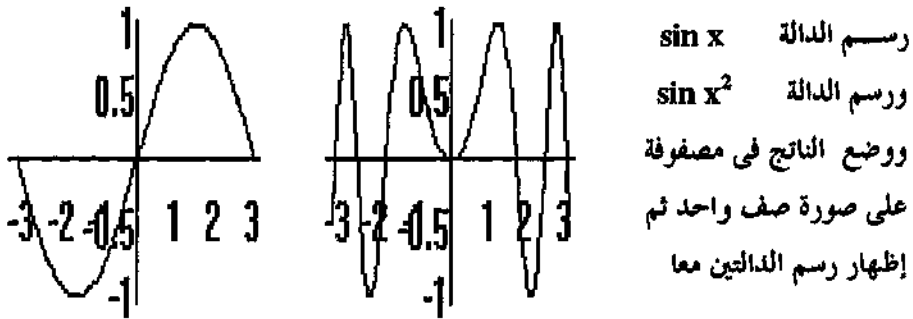
كتابة النص
RAAFAT RIAD RIZKALLA
متمركزا عند النقطة $(0.75,0.5)$

وفي ماتيماتيكا يمكن تكوين مصفوفة من أي بعد عناصرها أشكال مرسومة وذلك باستخدام الأمر
GraphicsArray كالآتي :

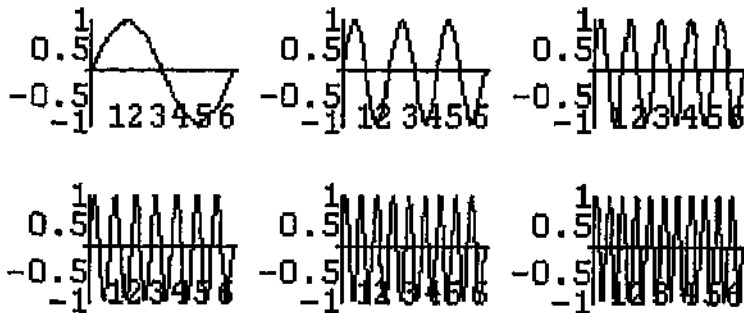
GraphicsArray[{graph1,graph2,...}]	
عمل صف من الأشكال المرسومة graph1,graph2,...	
GraphicsArray[{graph11,graph12,...}, {graph21,graph22,...},...]	
عمل مصفوفة من الأشكال المرسومة	
graph11,graph12,...	الصف الأول به الرسوم
graph21,graph22,...	والصف الثاني به الرسوم

والأشكال المرسومة داخل المصفوفة GraphicsArray يتم عرضها بواسطة الأمر Show حيث تظهر الرسوم في مناطق مستطيلة مرتبة في صفوف ومع الأمر GraphicsArray يمكن إضافة اختيارات الأمر Plot بالإضافة الى الاختيار GraphicsSpacing وقيمته القعالة 0.1 وهو يستخدم للتحكم في الفراغ بين مناطق الرسم المستطيلة المرسوم داخلها عناصر المصفوفة .

```
In[31]:= p1one=Plot[Sin[x],{x,-Pi,Pi},DisplayFunction->Identity];
p2two=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},DisplayFunction->Identity];
Show[GraphicsArray[{p1one,p2two}]]
```



```
In[32]:= psin[n_]:=Plot[Sin[n x],{x,0,2Pi},DisplayFunction->Identity];
a=Partition[Table[psin[n],{n,1,11,2}],3];
Show[GraphicsArray[a]]
```



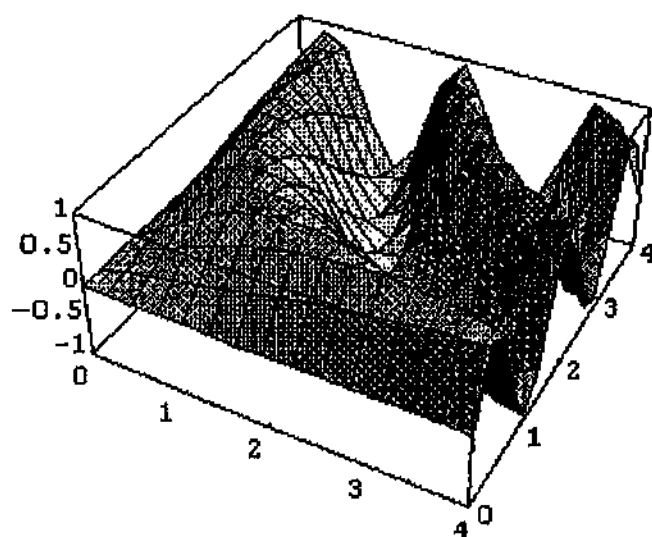
رسم الدالة $\sin(nx)$ في النطاق $[0, 2\pi]$ وذلك لقيم $n = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ثم وضع الرسوم في مصفوفة وعرضها في صفين بحيث يحتوى كل صف على ثلاثة رسوم

٢. رسم الدوال في الفراغ Three-Dimensional Plotting

الدالة في متغيرين يرمز لها $z=f(x,y)$ حيث x,y متغيرات مستقلة، z متغير تابع ونطاق الدالة $f(x,y)$ يقع في المستوى xy ويمثله مجموعة النقط (x,y) المعروف عندها الدالة بينما مدى الدالة $f(x,y)$ يقع على محور z في الفراغ ورسم الدالة $z = f(x,y)$ هو عبارة عن سطح في الفراغ يمثله مجموعة النقط (x,y,z) التي تحقق المعادلة $z = f(x,y)$ وفي ماتيماتيكا يمكن رسم الدوال في الفراغ باستخدام الأمر `Plot3D` كالآتي :

`Plot3D[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]`

`In[1]:=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4}]`



رسم الدالة

$\sin(x y)$

على المنطقة المستطيلة الشكل

$0 \leq x \leq 4$ ، $0 \leq y \leq 4$

وكما في حالة الأمر **Plot** للرسم في المستوى فإنه يوجد العديد من الاختيارات التي تتحكم في شكل الرسم في الفراغ ويمكن الاستعلام عن الاختيارات الفعالة للأمر **Plot3D** باستخدام الأمر **Options** كالآتي :

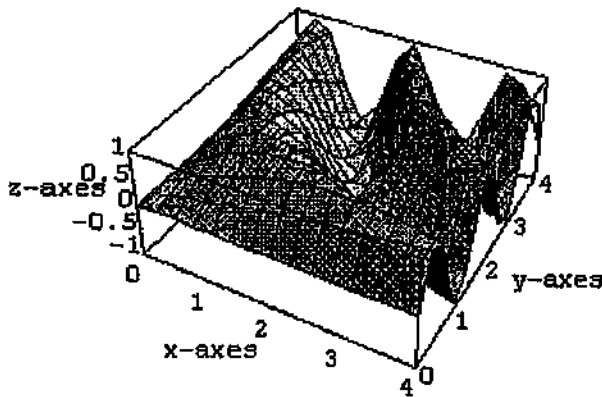
In[2]:=Options[Plot3D]

```
{AmbientLight -> GrayLevel[0], AspectRatio -> Automatic, Axes ->
True, AxesEdge -> Automatic, AxesLabel -> None, AxesStyle ->
Automatic, Background -> Automatic, Boxed -> True, BoxRatios -> {1,
1, 0.4}, BoxStyle -> Automatic, ClipFill -> Automatic, ColorFunction
-> Automatic, ColorOutput -> Automatic, Compiled -> True,
DefaultColor -> Automatic, Epilog -> {}, FaceGrids -> None,
HiddenSurface -> True, Lighting -> True, LightSources -> {{1., 0.,
1.}, RGBColor[1, 0, 0]}, {{1., 1., 1.}, RGBColor[0, 1, 0]}, {{0., 1., 1.},
RGBColor[0, 0, 1]}}, Mesh -> True, MeshStyle -> Automatic, PlotLabel
-> None, PlotPoints -> 15, PlotRange -> Automatic, PlotRegion ->
Automatic, Plot3Matrix -> Automatic, Prolog -> {}, Shading -> True,
SphericalRegion -> False, Ticks -> Automatic, ViewCenter ->
Automatic, ViewPoint -> {1.3, -2.4, 2.}, ViewVertical -> {0., 0., 1.},
DefaultFont -> $DefaultFont, DisplayFunction -> $DisplayFunction}
```

والآن نعرض بالتفصيل بعض الاختيارات المستخدمة مع الأمر **Plot3D** والقيمة الفعالة لكل منها بالإضافة الى قيم أخرى بديلة للتحكم في مواصفات الرسم في الفراغ وهذه الاختيسارات يمكن استخدامها أيضا مع أمر إعادة الرسم **Show** .

Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
Axes->True	رسم محاور الإحداثيات x, y, z	Axes->False
AxesLabel->None	كتابة عناوين على المحاور	AxesLabel->"z-label" -AxesLabel >{"x","y","z"}
PlotLabel->None	كتابة عنوان على الرسم	PlotLabel->"any label"
PlotPoints->15	عدد نقط العينة في الاتجاهين x, y والتي يتم عندها حساب قيم الدالة وهذا الاختيار لا يستخدم مع الأمر Show	PlotPoints->n PlotPoints->{nx,ny}
PlotRange->Automatic	مدى الإحداثيات المستخدمة في الرسم	PlotRange->{zmin,zmax} PlotRange->{{xn,xx}, {yn,yx},{zn,zx}} PlotRange->All
Ticks->Automatic	ترقيم محاور الإحداثيات	Ticks->None Ticks->{xt,yt,zt} حيث xt, yt, zt يمكن أن تأخذ القيم Automatic أو None

```
In[3]:=rp1=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4},
  AxesLabel->{"x-axes","y-axes","z-axes"}]
```



استخدام المتغير rp1 كمخزن

لرسم الدالة

$\sin(xy)$

على المنطقة المستطيلة الشكل

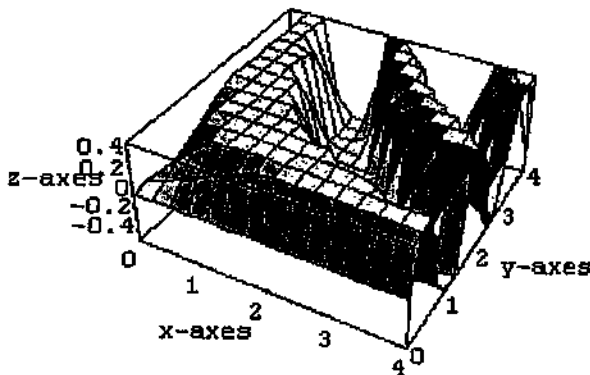
$0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$

مع كتابة العناوين

x-axes , y-axes , z-axes

على محاور الإحداثيات

```
In[4]:=rp2=Show[rp1,PlotRange->{-0.5,0.5}]
```



استخدام المتغير rp2 كمخزن

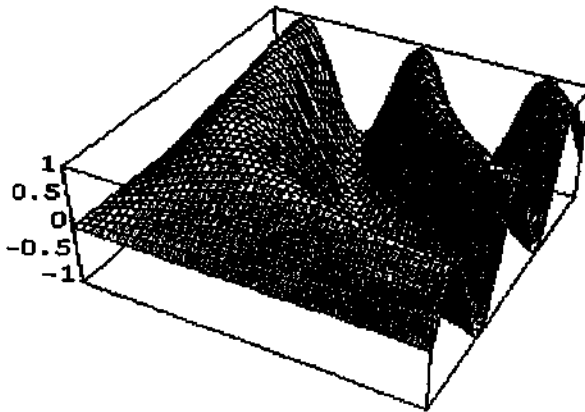
يوضع داخله أمر إعادة الرسم

Show للشكل السابق rp1

مع تغيير مدى الرسم بالاختيار

PlotRange->{-0.5,0.5}

```
In[5]:=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4},PlotPoints->40,
Ticks->{None,None,Automatic}]
```



رسم الدالة

$\sin(xy)$

على المنطقة المستطيلة الشكل

$0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$

مع استخدام الاختيار

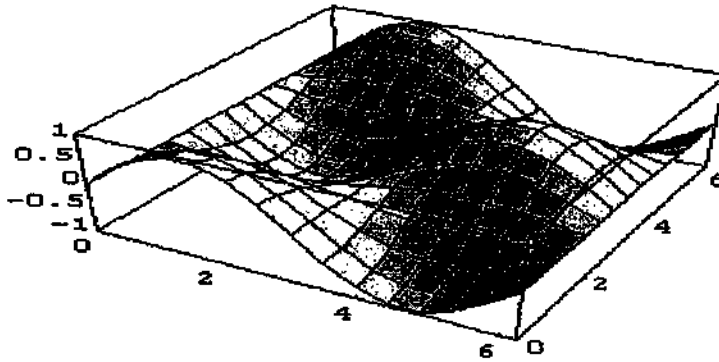
$\text{PlotPoints} \rightarrow 40$

وترقيم محاور الإحداثيات z فقط

والأشكال الناتجة من الأمر Plot3D يمكن النظر إليها على أنها صور فوتوغرافية للسطوح وتوجد بعض الاختيارات مع الأوامر Plot3D, Show يمكن من خلالها فحص السطوح من مواضع مختلفة ومن أهم هذه الاختيارات هو الاختيار ViewPoint لتحديد إحداثيات النقطة في الفراغ التي يتم وضع آلة التصوير عندها لالتقاط صور للسطح وبالتالي يمكن التعرف على الملامح المختلفة للسطح عن طريق وضع الكاميرا في أماكن مختلفة ، ويقوم ماتيماتيكا بوضع السطح داخل صندوق باستخدام الاختيار Boxed وأبعاد هذا الصندوق يمكن التحكم فيها بواسطة الاختيار BoxRatios .

Option Name اسم الاختيار Default value وقيمة الافتعالة	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
ViewPoint->{1.3,-2.4,2}	تحديد إحداثيات نقطة في الفراغ يتم النظر من عندها الى السطح وهذه الإحداثيات تكون بالنسبة الى مركز الصندوق	ViewPoint->{xv,yv,zv} تحديد أي نقطة (xv,yv,zv) في الفراغ
Boxed->True	رسم صندوق حول السطح	Boxed->False
BoxRatios->{1,1,0.4}	تحديد النسبة بين أطوال اوجه الصندوق في اتجاه المحاور x,y,z على الترتيب	BoxRatios->{nx,ny,nz} جعل النسبة nx:ny:nz بين أطوال اوجه الصندوق

In[6]:=rp3=Plot3D[Sin[x] Cos[y],{x,0,2Pi},{y,0,2P}]

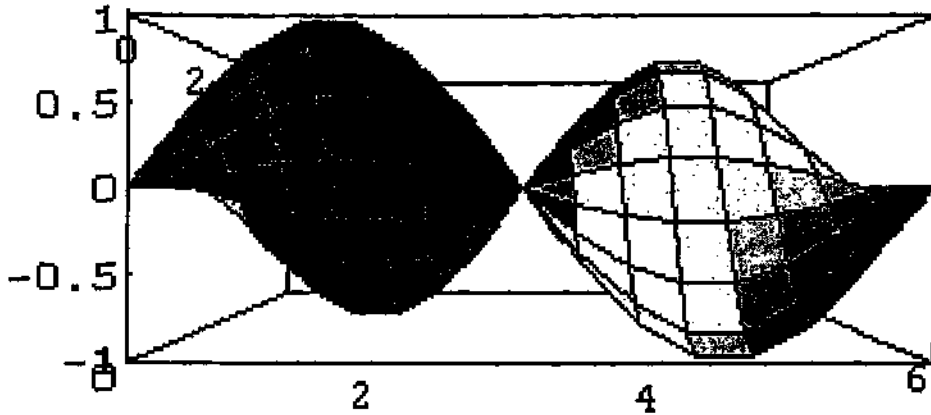


استخدام المتغير rp3 كمخزن لرسم سطح الدالة $\sin(x) \cos(y)$ في النطاق

$$0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 2\pi$$

حيث يتم النظر الى السطح من آلة تصوير تم وضعها عند الإحداثيات الافتعالة {1.3, -2.4, 2}

In[7]:=Plot3D[Sin[x] Cos[y],{x,0,2Pi},{y,0,2Pi},ViewPoint->{0,-2,0}]

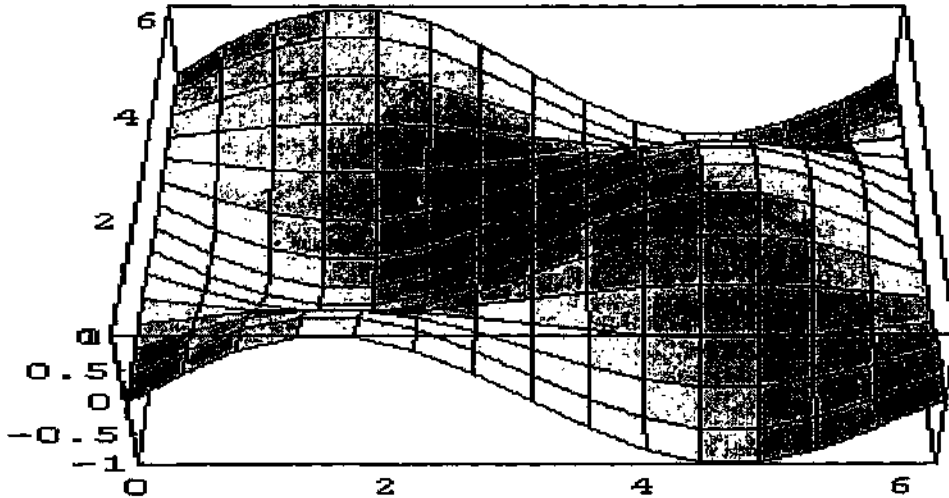


رسم سطح الدالة $\sin(x) \cos(y)$ في النطاق

$$0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq 2\pi$$

حيث يتم النظر الى السطح من آلة تصوير تم وضعها عند الإحداثيات (0, -2, 0)

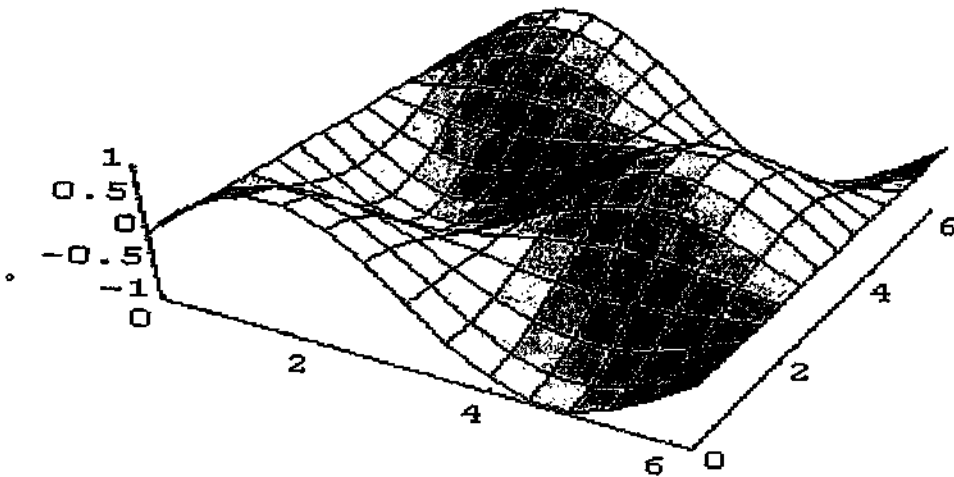
In[8]:=Show[rp3,ViewPoint->{0,-4,4}]



استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp3 حيث يتم تغيير موضع

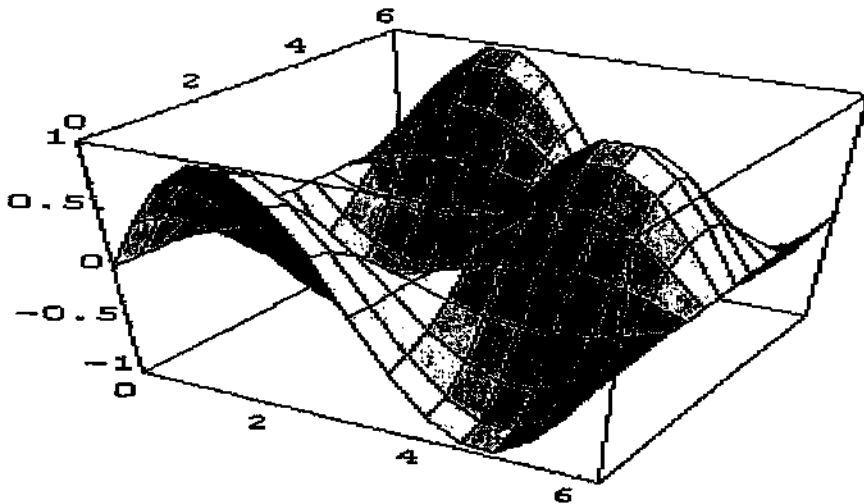
آلة التصوير الى الإحداثيات (0, -4, 4)

In[9]:=Show[rp3,Boxed->False]



استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp3 حيث يتم عرض السطح فقط وبدون رسم صندوق من حوله وذلك عن طريق الاختيار **Boxed->False**

In[10]:=Show[rp3,BoxRatios->{1,1,1}]

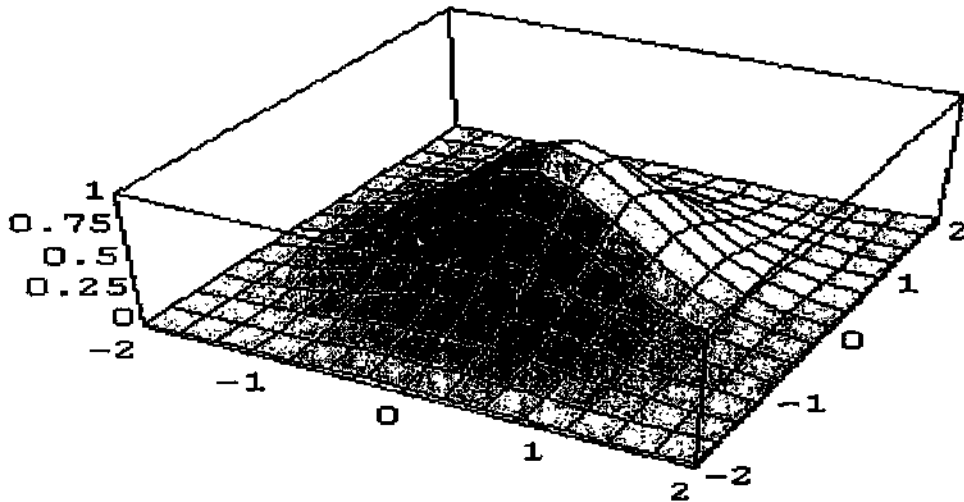


استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp3 حيث يتم عرض السطح داخل صندوق مكعب الشكل وذلك عن طريق الاختيار **BoxRatios->{1,1,1}**

وعند رسم السطوح في الفراغ يمكن التحكم في الأجزاء المخفية من السطح باستخدام الاختيار **HiddenSurface** كما يمكن عمل ظلال للسطح باستخدام الاختيار **Shading** أو عمل شبكة على السطح في اتجاه المحاور x, y وذلك باستخدام الاختيار **Mesh**

Option Name اسم الاختيار	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
Default value وقيمة الفعالة		
HiddenSurface->True	منع ظهور الأجزاء المخفية من السطح	HiddenSurface->False
Shading->True	عمل ظلال للسطح	Shading->False
Mesh->True	رسم شبكة على السطح في اتجاه المحاور x, y	Mesh->False

In[11]:=rp4=Plot3D[Exp[-x^2-y^2],{x,-2,2},{y,-2,2}]

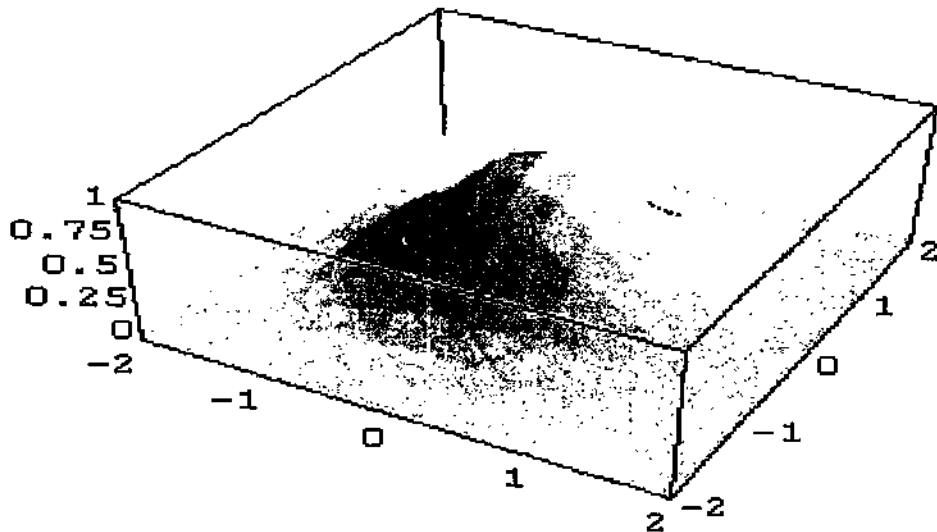


رسم سطح الدالة $e^{-x^2 - y^2}$ في النطاق

$$-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$$

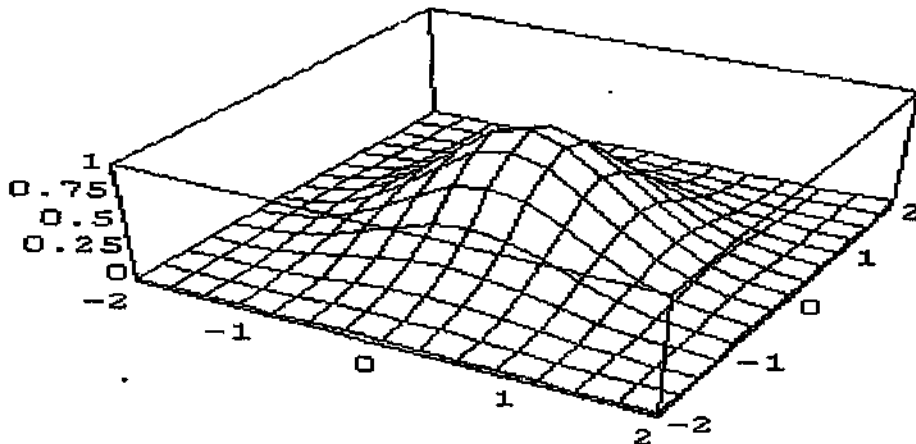
ونلاحظ وجود شبكة على السطح في اتجاه المحاور وذلك نتيجة الاختيار الفعال **Mesh->True**

In[12]:=Show[rp4,Mesh->False]



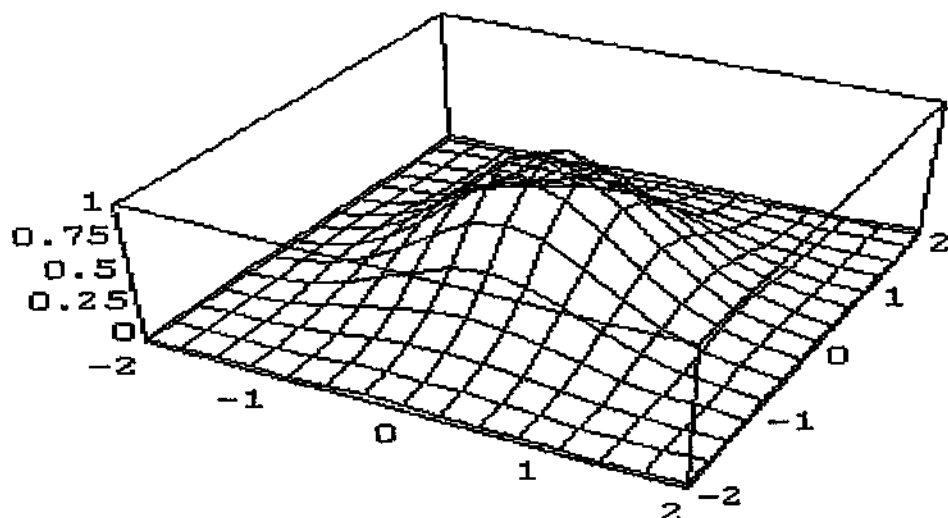
استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp4 حيث يتم العرض بدون رسم شبكة على السطح في اتجاه الخاور وذلك نتيجة الاختيار Mesh->False

In[13]:=Show[rp4,Shading->False]



استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp4 حيث يتم العرض بدون تظليل السطح وذلك نتيجة الاختيار Shading->False

In[14]:=Show[rp4,HiddenSurface->False]

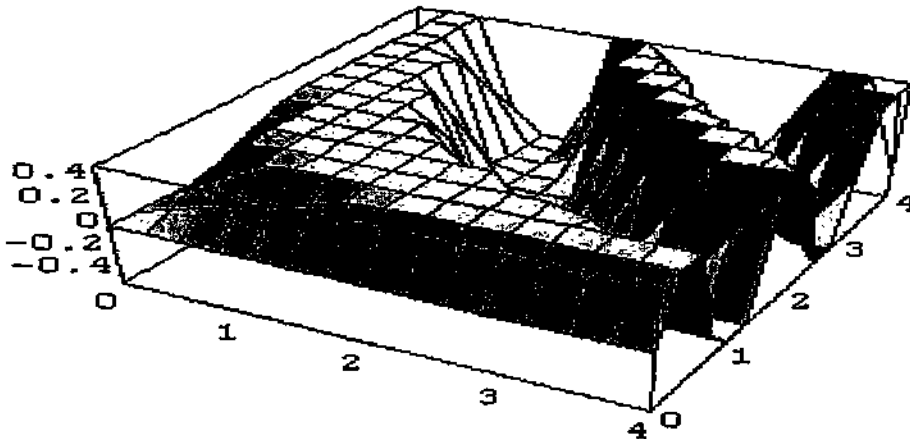


استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp4 حيث يتم إظهار الأجزاء المخفية من السطح وذلك نتيجة الاختيار HiddenSurface->False

وعند رسم السطوح في الفراغ يقوم ماتيماتيكا بقطع أجزاء السطح الخارجة عن الصندوق ويمكن توضيح الأماكن التي تم فيها قطع السطح باستخدام الاختيار ClipFill كالآتي :

Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
ClipFill->Automatic	توضيح الأماكن التي تم عندها قطع السطح وفقا للمواصفات الفعالة للرسم	ClipFill->None ClipFill->GrayLevel[i] ClipFill->RGBColor[r,g,b] ClipFill->{bottom,top}

In[15]:= rp5=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4},PlotRange->{-0.5,0.5}]

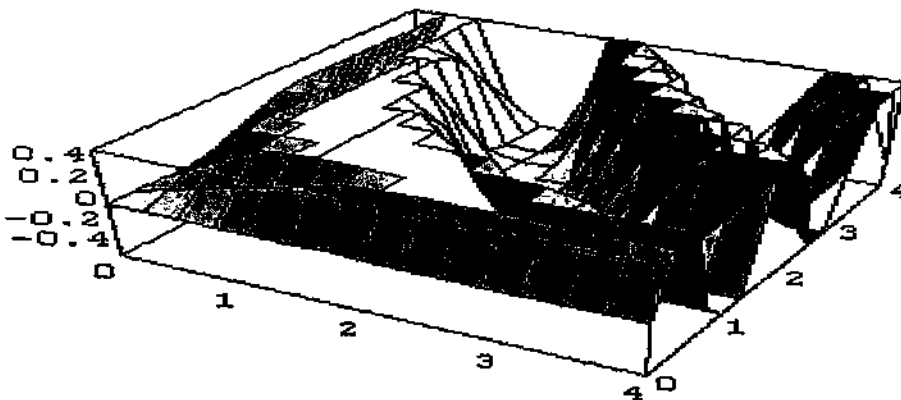


استخدام المتغير rp5 كمخزن لرسم الدالة Sin(x y) على المنطقة المستطيلة الشكل

$$0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 4$$

مع تغيير مدى الرسم بالاختيار PlotRange->{-0.5,0.5}

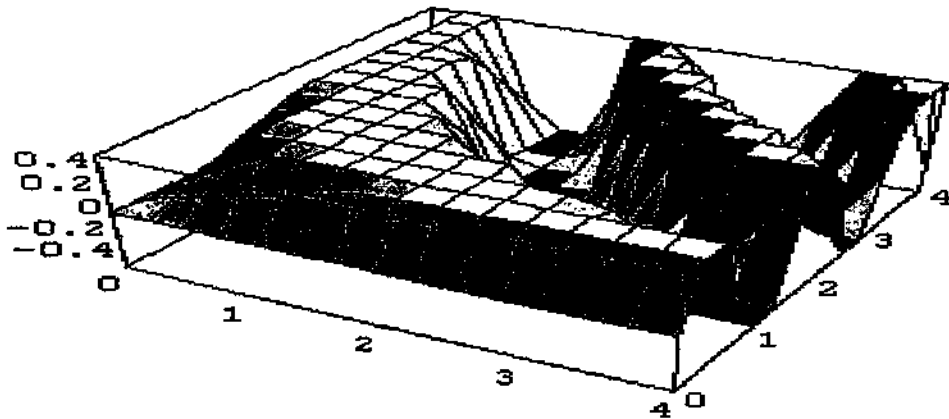
In[16]:= Show[rp5,ClipFill->None]



استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp5 حيث يتم عرض السطح بحيث تترك الأجزاء المقطوعة من السطح واضحة بدون تظليل وذلك

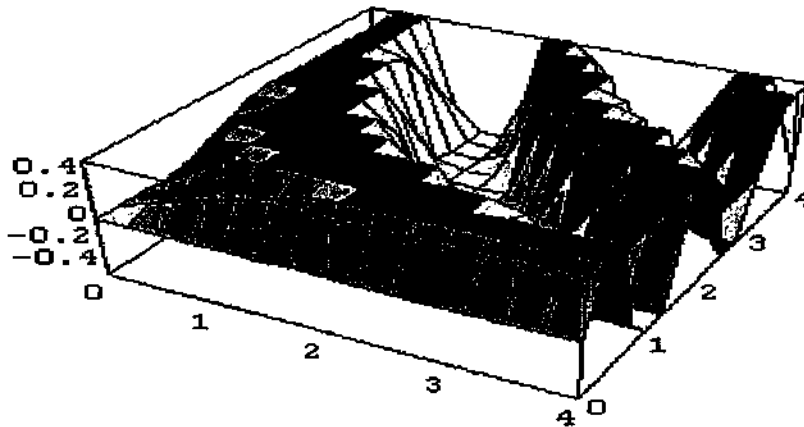
نتيجة الاختيار ClipFill->None

In[17]:= Show[rp5,ClipFill->{GrayLevel[0],GrayLevel[1]}]



استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp5 حيث يتم عرض السطح بحيث تظهر الأجزاء المقطوعة للسطح من اسفل باللون الأسود ومن أعلى باللون الأبيض وذلك نتيجة الاختيار ClipFill->{GrayLevel[0],GrayLevel[1]}

In[18]:=Show[rp5,ClipFill->{GrayLevel[1],GrayLevel[0]}]



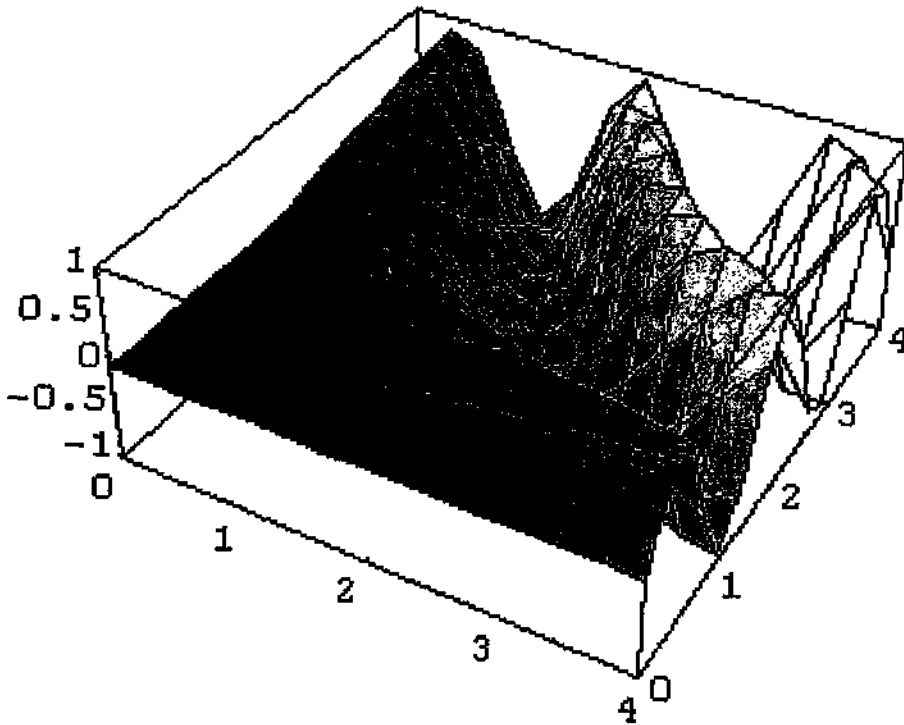
استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp5 حيث يتم عرض السطح بحيث تظهر الأجزاء المقطوعة للسطح من اسفل باللون الأبيض ومن أعلى باللون الأسود وذلك نتيجة الاختيار ClipFill->{GrayLevel[1],GrayLevel[0]}

ويستطيع ماتيماتيكا تظليل كل جزء من سطح الدالة وفقا لموصفات معينة وذلك باستخدام الأمر Plot3D في الصورة الآتية :

Plot3D[{f(x,y),s},{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]

رسم سطح الدالة $f(x,y)$ مع تظليل السطح وفقا للدالة s

In[19]:=Plot3D[{Sin[x y],GrayLevel[(x+y)/8]},{x,0,4},{y,0,4}]



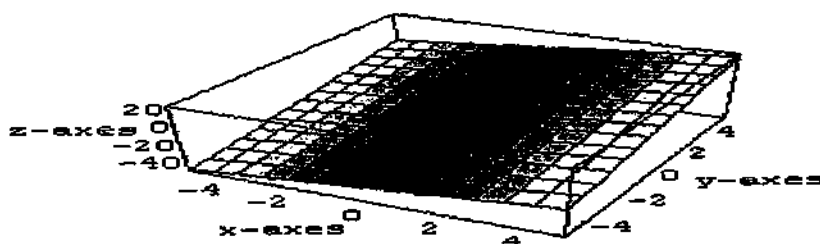
رسم الدالة $\sin(xy)$ على المنطقة المستطيلة الشكل

$$0 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 4$$

وبحيث يتم تظليل سطح الدالة وفقا للدالة $\text{GrayLevel}[(x+y)/8]$

حيث تتغير قيم x, y على المنطقة المعطاة ونلاحظ في الرسم تدرج التظليل للسطح

**In[20]:=Plot3D[{3x+4y-9,GrayLevel[Abs[x]/5]},{x,-5,5},{y,-5,5},
AxesLabel->{"x-axes","y-axes","z-axes"}]**

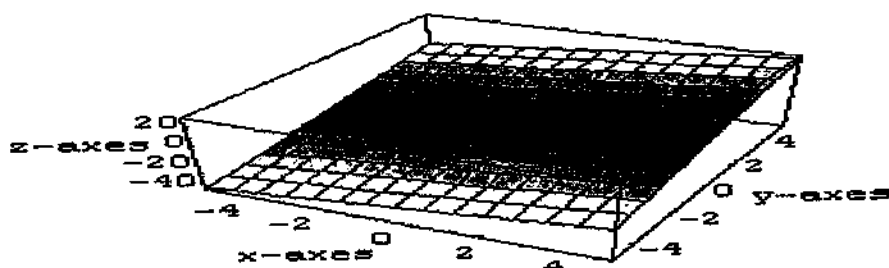


رسم المستوى $z = 3x + 4y - 9$ على المنطقة المستطيلة الشكل

$$-5 \leq x \leq 5, \quad -5 \leq y \leq 5$$

وبحيث يتم تظليل سطح المستوى وفقا للدالة $\text{GrayLevel}[\text{Abs}[x]/5]$ حيث تتغير قيم x, y على المنطقة المعطاة ونلاحظ في الرسم تدرج التظليل لسطح المستوى في اتجاه محور x كما نلاحظ كتابة عناوين على المحاور نتيجة للاختيار **AxesLabel**

**In[21]:=Plot3D[{3x+4y-9,GrayLevel[Abs[y]/5]},{x,-5,5},{y,-5,5},
AxesLabel->{"x-axes","y-axes","z-axes"}]**



رسم المستوى $z = 3x + 4y - 9$ على المنطقة المستطيلة الشكل

$$-5 \leq x \leq 5, \quad -5 \leq y \leq 5$$

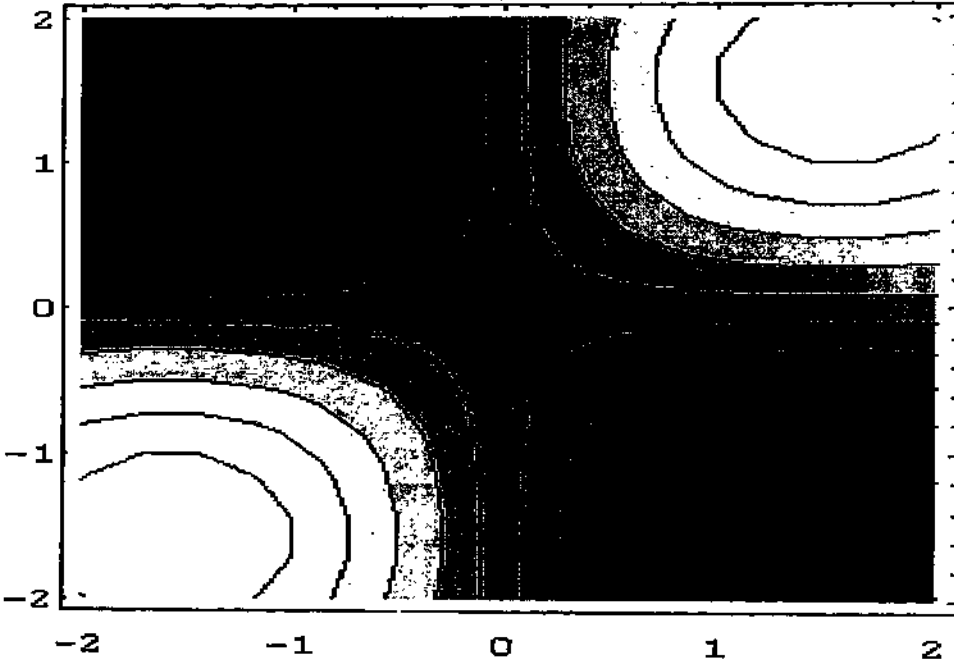
وبحيث يتم تظليل سطح المستوى وفقا للدالة $\text{GrayLevel}[\text{Abs}[y]/5]$ حيث تتغير قيم x, y على المنطقة المعطاة ونلاحظ في الرسم تدرج التظليل لسطح المستوى في اتجاه محور y كما نلاحظ كتابة عناوين على المحاور نتيجة للاختيار **AxesLabel**

وعندما نحاول التعمق في فهم طبيعة سطح خاص فانه يكون من المفيد النظر الى السطح بطرق مختلفة والأمر **Plot3D** يقدم لنا صورة في الفراغ للسطح وفي برنامج ماتيماتيكا يمكن الحصول على خريطة لمقاطع السطح بطريقة خطوط الكونتور التي تربط النقط الواقعة على السطح والتي لها نفس الارتفاع ويتم ذلك عن طريق الأمر **ContourPlot** كالآتي:

ContourPlot[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]

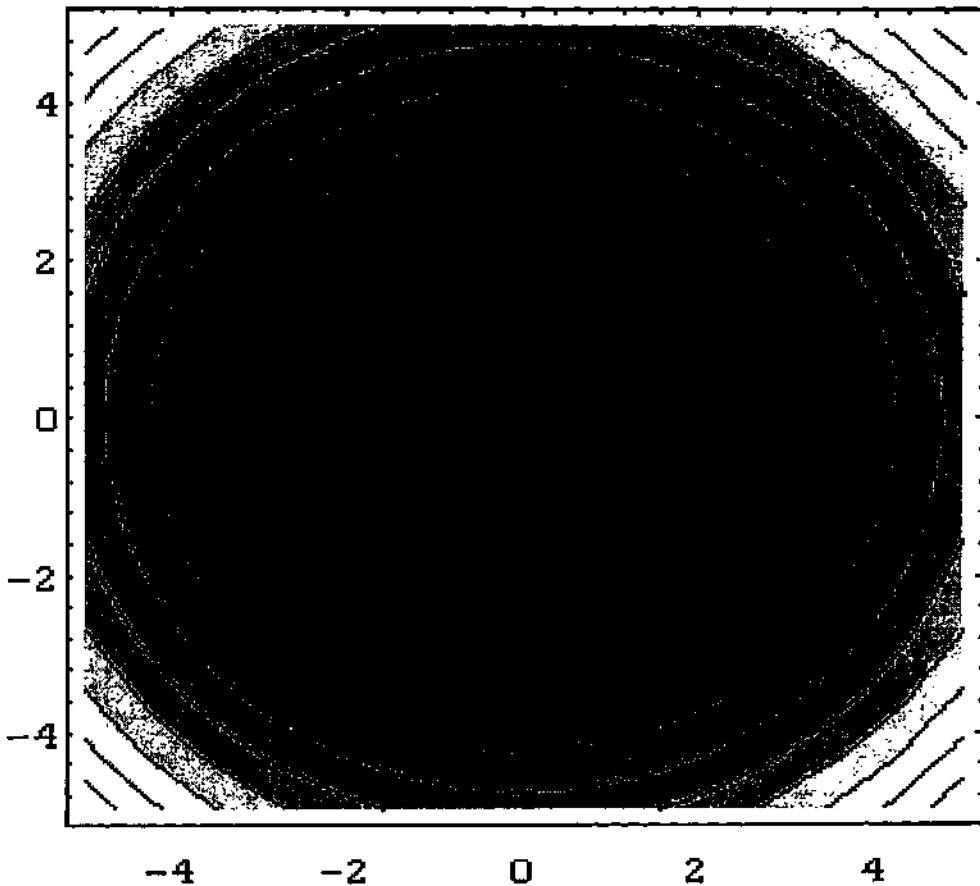
رسم خطوط الكونتور للدالة $f(x,y)$ في النطاق من $x = \text{xmin}$ الى $x = \text{xmax}$ ومن $y = \text{ymin}$ الى $y = \text{ymax}$

In[22]:=ContourPlot[Sin[x] Sin[y], {x,-2,2},{y,-2,2}]



رسم مقاطع سطح الدالة $f(x,y) = \text{Sin}(x) \text{Sin}(y)$ بطريقة خطوط الكونتور في المنطقة $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$

```
In[23]:= ContourPlot[x^2+y^2, {x,-5,5},{y,-5,5}]
```



رسم مقاطع سطح الدالة $f(x,y)=x^2+y^2$ بطريقة الخطوط الكونتور في المنطقة

$$-5 \leq x \leq 5 \quad , \quad -5 \leq y \leq 5$$

٣ • رسم الدوال البارامترية Parametric Plots

إذا كان $f(x)$ دالة وحيدة القيمة single valued فإن المعادلات التي على الصورة $y = f(x)$ تصف منحنيات في المستوى يقطعها أي خط رأسي مرة واحدة فقط في نطاق التعريف ، والإحداثي y لكل نقطة يكون دالة في الإحداثي x ولكن توجد منحنيات أكثر تعقيدا تضاعف نفسها ومثل هذه المنحنيات يمكن دراستها بسهولة باستخدام الصورة البارامترية ويتم ذلك بجعل المتغيرات x, y دوال في متغير آخر t مثل $x = g(t)$, $y = h(t)$ وكل قيمة للمتغير t تعين قيمة للمتغيرات x, y يمكن اعتبارها إحداثيات نقطة في المستوى xy وفئة جميع النقط $(g(t), h(t))$ تكون منحنى والمعادلتان $x = g(t)$, $y = h(t)$ تسميان المعادلتان البارامتريتان للمنحنى والمتغير t يسمى بارامتر . وبرنامج ماتيماتيكا قادر على رسم الدوال في المستوى بالصورة البارامترية وذلك باستخدام الأمر ParametricPlot كالآتي :

ParametricPlot[{fx, fy}, {t, tmin, tmax}]

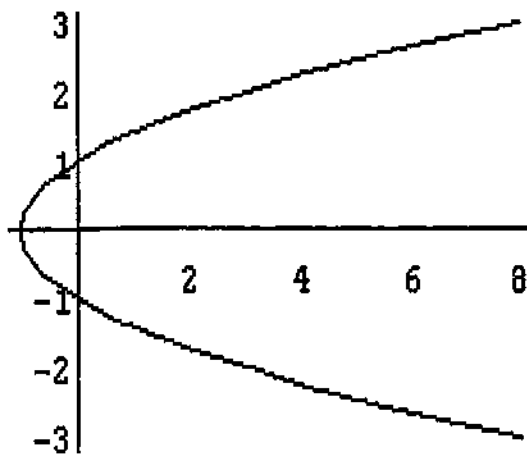
رسم الدالة المعطاة بالصورة البارامترية

$x=fx$, $y=fy$, $tmin \leq t \leq tmax$
حيث fx , fy دوال في البارامتر t

ParametricPlot[{ {fx, fy}, {gx, gy}, ...}, {t, tmin, tmax}]

رسم أكثر من دالة معطاة بالصورة البارامترية

In[1]:=ParametricPlot[{t^2-1,t},{t,-3,3}]



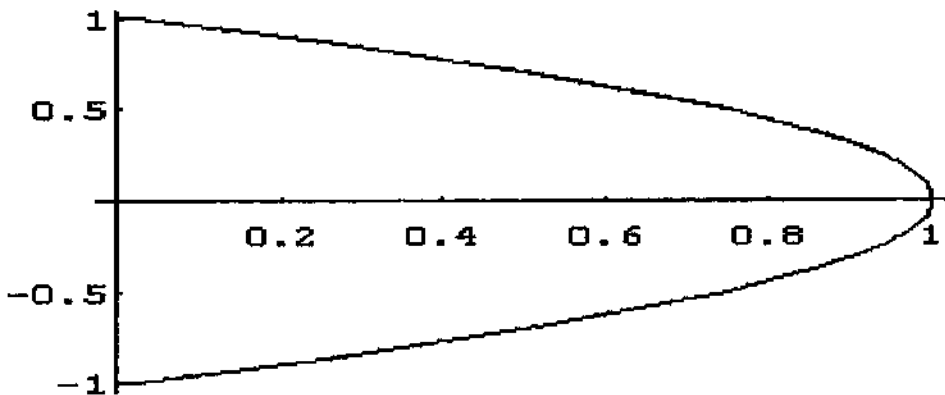
رسم المنحنى الذى معادلته البارامترتان

$$x=t^2-1, y=t, -3 \leq t \leq 3$$

والمنحنى فى الصورة الكارتيزية يكون

$$x^2=x+1, -1 \leq x \leq 8$$

In[2]:=ParametricPlot[{Cos[t]^2,Sin[t]},{t,0,2Pi}]



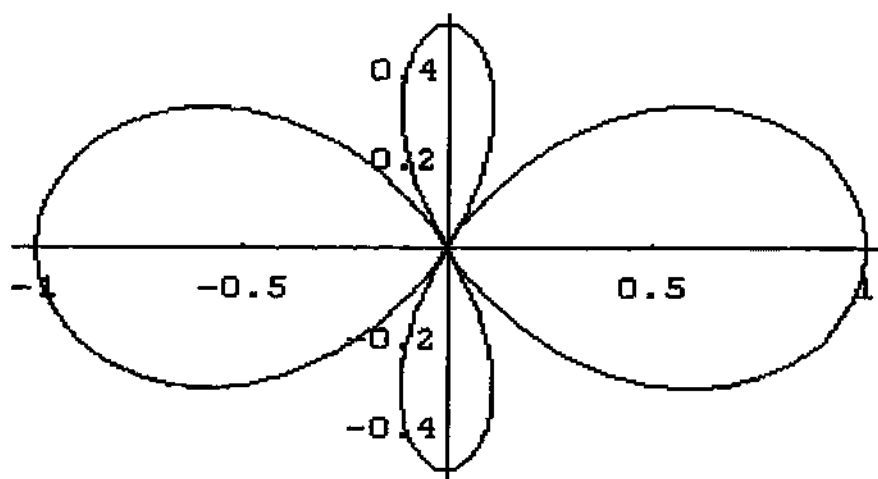
رسم المنحنى الذى معادلته البارامترتان

$$x=\cos^2(t), y=\sin(t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

والمنحنى فى الصورة الكارتيزية يكون

$$y^2=1-x, 0 \leq x \leq 1$$

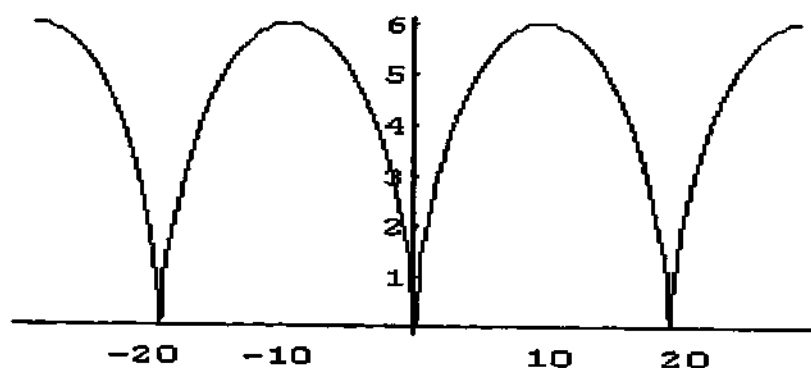
```
In[3]:=r[t_]:= (3Cos[t]^2-1)/2;  
ParametricPlot[{r[t]Cos[t],r[t]Sin[t]},{t,0,2Pi}]
```



رسم المنحنى في الصورة القطبية

$$r = \frac{3\cos^2(t) - 1}{2}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

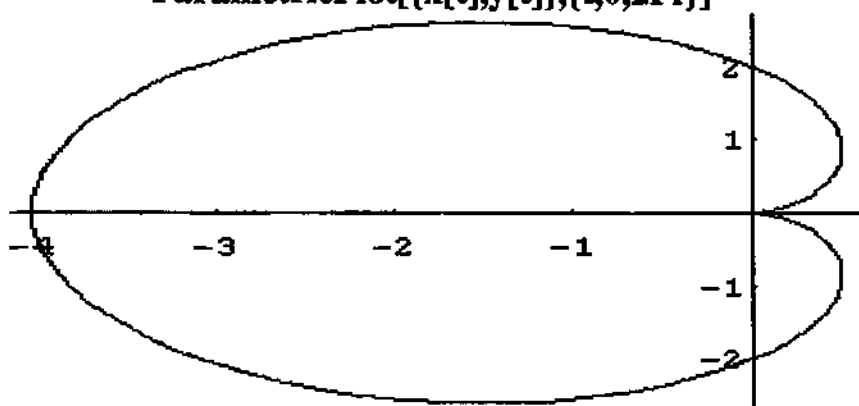
```
In[4]:=ParametricPlot[{3(t-Sin[t]),3(1-Cos[t])},{t,-3Pi,3Pi}]
```



رسم منحنى الدويرى (السيكلويد)

$$\begin{aligned} x &= 3(t - \sin(t)) \\ y &= 3(1 - \cos(t)) \quad , \quad -3 \leq t \leq 3 \end{aligned}$$

```
In[5]:=x[t_]:=2(Cos[t]-Cos[t]^2);
y[t_]:=2(Sin[t]-Sin[t] Cos[t]);
ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,0,2Pi}]
```

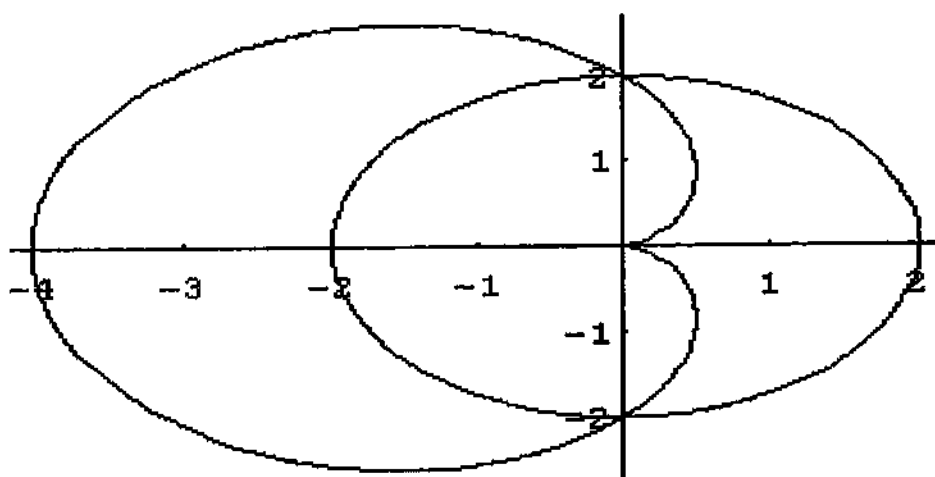


رسم منحنى الكارديويد المعطى بالصورة البارامترية

$$x(t) = 2 \cos(t) [1 - \cos(t)]$$

$$y(t) = 2 \sin(t) [1 - \cos(t)]$$

```
In[6]:=ParametricPlot[{x[t],y[t]},{2Cos[t],2Sin[t]},{t,0,2Pi}]
```

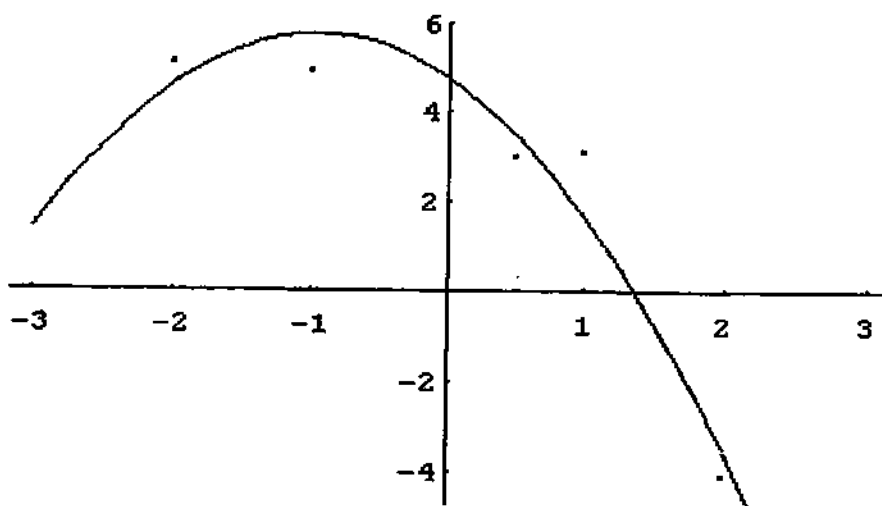


رسم منحنى الكارديويد السابق مع الدائرة المعطاة بالصورة القطبية

$$x(t) = 2 \cos(t)$$

$$y(t) = 2 \sin(t)$$

الباب السادس ماثيماتيكيا والتحليل العددي



في هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكيا
والخاصة بالموضوعات الآتية :

١. الحل العددي لمعادلات كثيرات الحدود

Numerical Solution of Polynomial Equations

Numerical Root Finding

٢. إيجاد جذر تقريبي

Numerical Minimization

٣. إيجاد القيم الصغرى

٤. الحساب العددي للمجموع وحواصل الضرب

Numerical Sum and Product

Numerical Integration

٥. التكامل العددي

Least - squares

٦. التقريب بالمربعات الصغرى

الباب السادس

ماثيماتيك والتجليل العددي

التحليل العددي Numerical Analysis هو أحد فروع الرياضيات التي تعتمد بقوة على التطورات الحديثة في علم الكمبيوتر وعلى التطبيقات في استخدام الطرق العددية لحل المسائل الرياضية المختلفة . ومن أكثر مميزات ماثيماتيك هو القدرة على الحصول على نتائج مضبوطة وفي صورة رمزية Exact Symbolic Results للحسابات الرياضية المختلفة وفي بعض الحسابات يكون من غير الممكن الحصول على النتائج المضبوطة ولمثل هذه الحسابات فإن ماثيماتيك يقدم العديد من الدوال والأوامر للحصول على قيم عددية تقريبية للنتائج وكما علمنا من قبل فإن الدالة N والتي تستخدم بالصورة

expr/N أو $N[\text{expr}]$

تقوم بحساب قيمة عددية تقريبية للعملية الحسابية expr والدالة

$N[\text{expr},n]$

تقوم بحساب قيمة عددية تقريبية للعملية الحسابية expr مقربة الى n من الأرقام العشرية وفي هذا الباب سوف نتعرف على بعض أوامر ماثيماتيك الخاصة بالحصول على قيم تقريبية لنتائج العمليات الرياضية في مجالات مختلفة من التحليل العددي .

١. الحل العددي لمعادلات كثيرات الحدود Numerical Solution of Polynomial Equations

في برنامج ماتيماتيكا يمكن حل معادلات كثيرات الحدود باستخدام الأمر Solve كما عرفنا في الباب الثالث وفي حالة عدم الحصول على حل صريح للمعادلة أو مجموعة المعادلات يمكن استخدام الدالة N للحصول على حلول عددية تقريبية

باستخدام الأمر Solve يمكن حل معادلة

$$\text{In}[1] := \text{Solve}[x^2 - 3x + 2 == 0, x]$$
 كثيرة الحدود $x^2 - 3x + 2 = 0$ والحصول

$$\text{Out}[1] = \{\{x \rightarrow 1\}, \{x \rightarrow 2\}\}$$
 على الجذور

الأمر Solve لم يتمكن من إيجاد حل معادلة

$$\text{In}[2] := \text{Solve}[x^5 + 7x + 1 == 0, x]$$
 كثيرة الحدود $x^5 + 7x + 1 = 0$

$$\text{Out}[2] = \text{ToRules}[\text{Roots}[7x + x^5 == -1, x]]$$

باستخدام الدالة N نحصل على
 قيمة عادية تقريبية للحل

$$\text{In}[3] := \text{N}[\%]$$

$$\text{Out}[3] = \{\{x \rightarrow -1.11308 - 1.15173 I\},$$

$$\{x \rightarrow -1.11308 + 1.15173 I\},$$

$$\{x \rightarrow -0.142849\},$$

$$\{x \rightarrow 1.1845 - 1.15139 I\}, \{x \rightarrow 1.1845 + 1.15139 I\}\}$$

ويمكن إيجاد حلول عددية تقريبية بطريقة مباشرة لمعادلات كثيرات الحدود بدون الحاجة الى إيجاد الحل المضبوط أولاً وذلك باستخدام الأمر **NRoots** كالآتي :

NRoots[poly==0,x]	للحصول على حل عددي تقريبي لمعادلة poly = 0 كثيرة الحدود بالنسبة الى المتغير x
NRoots[poly==0,x,n]	للحصول على حل عددي تقريبي لمعادلة poly = 0 كثيرة الحدود بالنسبة الى المتغير x وبدقة n رقم عشري

In[4]:=NRoots[x^5+7x+1==0,x] للحصول على حل عددي تقريبي لمعادلة
Out[4]= كثيرة الحدود $x^5 + 7x + 1 = 0$
 $x == -1.11308 - 1.15173 I$
 $x == -1.11308 + 1.15173 I$ $x == -0.142849$
 $x == 1.1845 - 1.15139 I$ $x == 1.1845 + 1.15139 I$

In[5]:=ToRules[%] لجعل الحل الناتج من جملة الإدخال **In[4]**
Out[5]= في صورة قائمة بدلا من الصورة المنطقية

**Sequence[{x -> -1.11308 - 1.15173 I},
{x -> -1.11308 + 1.15173 I},
{x -> -0.142849},
{x -> 1.1845 - 1.15139 I},
{x -> 1.1845 + 1.15139 I}]**

٢. إيجاد جذر تقريبي Numerical Root Finding

الأمر **NRroots** يقدم طريقة لإيجاد حلول عددية تقريبية لمعادلات كثيرات الحدود لكن إيجاد حلول عددية لمعادلات عامة (تحتوى على دوال مثلثية أو أسية أو لوغاريتمية...) يكون أكثر صعوبة ، وبرنامج ماتيماتيكا يحتوى على الأمر **FindRoot** الذى يقدم طريقة عددية للبحث عن أي جذر للمعادلة أو مجموعة من المعادلات بالقرب من نقطة بداية x_0 وذلك باستخدام طريقة نيوتن **Newton's method** في إيجاد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ مبتدئا من نقطة البداية x_0 ومعلومية قيمة المشتقة $f'(x)$ يتم الحصول على متابعة من القيم x_n حتى نصل الى اقرب جذر من نقطة البداية ويتم طباعة هذا الجذر فقط حتى إذا كان للمعادلة أكثر من جذر ، ومتابعة القيم x_n تحسب من العلاقة التكرارية

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} , n = 0, 1, \dots$$

وفى حالة إذا كان من الصعب الحصول على مشتقة الدالة بصورة رمزية فإنه يتم حساب المشتقة $f'(x)$ بصورة عددية تقريبية من العلاقة

$$f'(x_n) \cong \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}$$

ويتم حساب جذر للمعادلة $f(x) = 0$ باستخدام طريقة القاطع **secant method** من العلاقة

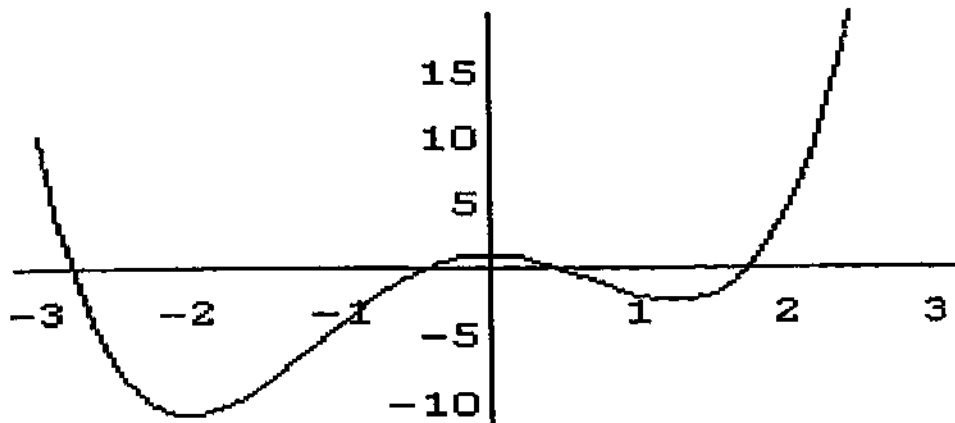
$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \right) f(x_n) , n = 1, 2, \dots$$

حيث x_0, x_1 قيم ابتدائية يتم تحديدها .

وفي الجدول الآتي نعرض الصيغ المختلفة للأمر FindRoot

الصيغة العامة للأمر	العمل الذي يقوم به الأمر
FindRoot[lhs==rhs,{x,x0}]	البحث عن جذر للمعادلة lhs==rhs مبتدئا من النقطة $x = x_0$
FindRoot[lhs==rhs, {x,xstart,xmin,xmax}]	البحث عن جذر للمعادلة lhs==rhs مبتدئا من النقطة $x = xstart$ وبحيث يتم البحث داخل النطاق من $x = xmin$ الى $x = xmax$ ويتم إيقاف البحث عن الجذر خارج هذا الإطار
FindRoot[lhs==rhs,{x,{x0,x1}}]	البحث عن جذر للمعادلة lhs==rhs مبتدئا من القيم الابتدائية x_0 , x_1 باستخدام طريقة القاطع
FindRoot[{eqn1,eqn2,...},{x,x0}, {y,y0},...]	البحث عن جذر لمجموعة المعادلات eqn1 , eqn2 , ... في وقت واحد مبتدئا من نقط البداية $x_0 , y_0 , ...$

In[1]:=f[x_]:=1-5 x^2+x^3+x^4;Plot[f[x],{x,-3,3}]



تعريف الدالة $f(x)$ وهي كثيرة حدود من الدرجة الرابعة تم رسم
الدالة في الفترة $(-3,3)$

In[2]:=FindRoot[f[x]==0,{x,-2.5}]

Out[2]={x -> -2.76251}

للحصول على جذر عددي تقريبي للمعادلة

$f(x) = 0$ بالقرب من نقطة البداية $x = -2.5$

In[3]:=FindRoot[f[x]==0,{x,0.1}]

Out[3]={x -> 0.483179}

للحصول على جذر عددي تقريبي للمعادلة

$f(x) = 0$ بالقرب من نقطة البداية $x = 0.1$

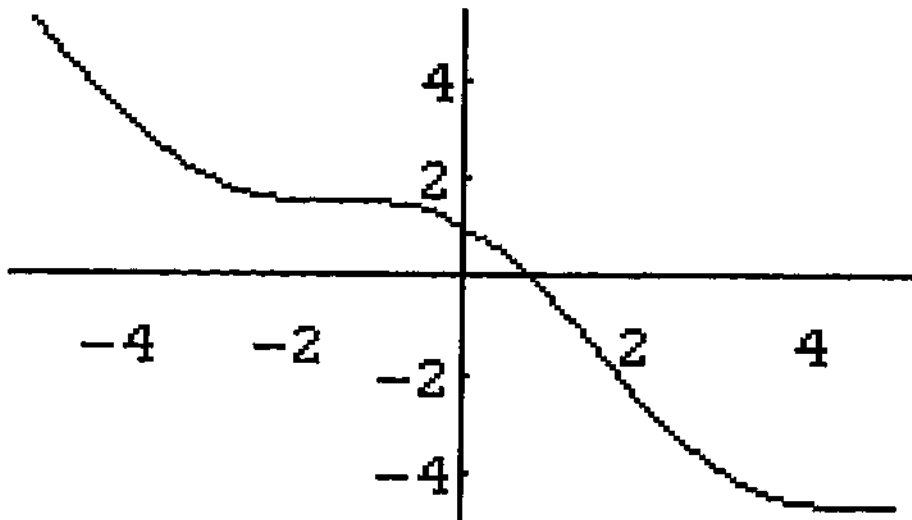
In[4]:=FindRoot[f[x]==0,{x,2}]

Out[4]={x -> 1.71594}

للحصول على جذر عددي تقريبي للمعادلة

$f(x) = 0$ بالقرب من نقطة البداية $x = 2$

In[5]:= Plot[Cos[x]-x,{x,-5,5}]



رسم الدالة $\cos(x) - x$ في الفترة $[-5, 5]$

In[6]:= FindRoot[Cos[x]==x,{x,0}]

Out[6]={x -> 0.739085}

للحصول على جذر عددي تقريبي للمعادلة

$\cos x = x$ بالقرب من $x=0$

In[7]:= FindRoot[Cos[x]==x,{x,{0,1}}]

Out[7]={x -> 0.739085}

للحصول على جذر عددي تقريبي للمعادلة

مبتدئا من نقط البداية $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

In[8]:= FindRoot[x^2-1==0,{x,Random[]}]

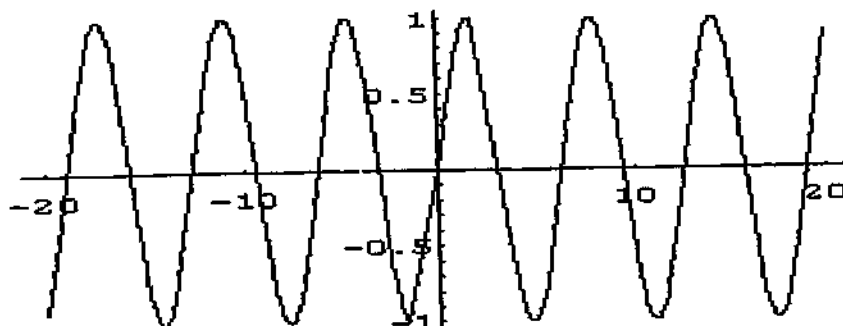
Out[8]={x -> 1.}

للحصول على جذر عددي تقريبي للمعادلة

$x^2 - 1 = 0$ بالقرب من نقطة بداية يتم

اختيارها عشوائيا داخل الفترة $(0,1)$

In[9]:=Plot[Sin[x],{x,-20,20}]



منحنى الدالة $\sin(x)$ يقطع محور x في عدد لانهاى من النقط
 $x = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

In[10]:=FindRoot[Sin[x]==0,{x,3}]

Out[10]={x -> 3.14159}

للحصول على جسر عددى تقريبي للمعادلة
 $\sin x = 0$ بالقرب من نقطة البداية $x=3$

In[11]:=FindRoot[Sin[x]==2,{x,1}]

Out[11]=FindRoot::cvmwt:

Newton's method failed to converge
 to the prescribed accuracy after 15
 iterations.

المعادلة $\sin x = 2$ ليس لها حل حقيقى ولكن
 لها حل مركب لذلك تظهر رسالة تفيد بان طريقة
 نيوتن لا تقرب من الجذر

In[12]:=FindRoot[Sin[x]==2,{x,I}]

Out[12]={x -> 1.5708 + 1.31696 I}

للحصول على جسر عددى تقريبي للمعادلة
 $\sin x = 2$ بالقرب من نقطة البداية $x=I$

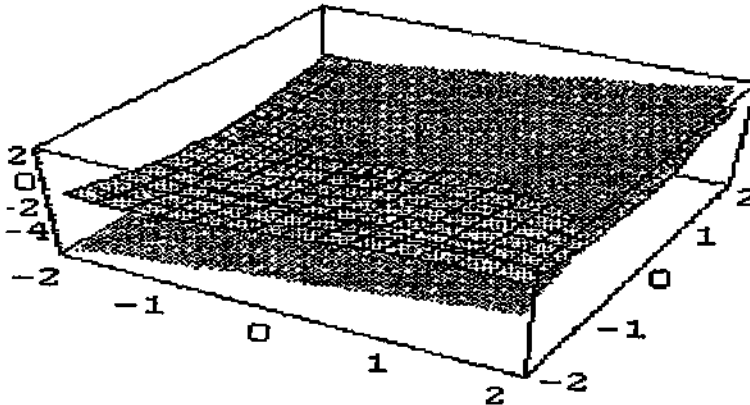
In[13]:=FindRoot[Sin[x]==0,{x,3,2.5,3.5}]

Out[13]={x -> 3.14159}

الدالة FindRoot تقوم بالبحث عن جذر
 عددى تقريبي للمعادلة $\sin x = 0$ بالقرب
 من نقطة البداية $x=3$ وداخل الفترة
 $[2.5, 3.5]$ فقط ونلاحظ في هذا المثال انه
 يوجد جذر في هذه الفترة

In[14]:=FindRoot[Sin[x]==0,{x,1,0.5,1.5}] تقوم بالبحث عن جذر عددي
 Out[14]=FindRoot::regex: $\sin x = 0$ مبتدئا من النقطة $x=1$ تقريبي للمعادلة
 Reached the point {-0.557408} فقط ونلاحظ في هذا وداخل الفترة [0.5,1.5]
 which is outside the region {{0.5, 1.5}}. المثال انه لا يوجد جذر في هذه الفترة
 {x -> -0.557408}

In[15]:=p1=Plot3D[Sin[x]-Cos[y],{x,-2,2},{y,-2,2},
 DisplayFunction->Identity];
 p2=Plot3D[x+y-1,{x,-2,2},{y,-2,2},Mesh->False,
 DisplayFunction->Identity];
 Show[p1,p2]



في هذا المثال تم استعراض رسم الدالة $\sin(x) - \cos(y)$ وتخطيط السطح الناتج بخطوط
 شبكية مع رسم الدالة $x + y - 1$ بدون تخطيط السطح الناتج وقد تم رسم الدالتين معا
 في شكل واحد لتوضيح تقاطع السطحين . ولإيجاد حل عددي تقريبي للمعادلتين معا
 في آن واحد مبتدئا من نقط البداية $x = 0.1$, $y = 0.2$

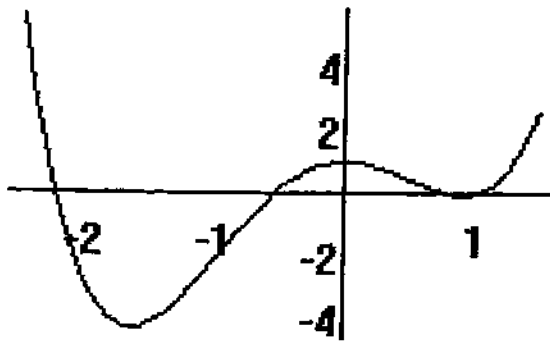
In[16]:=FindRoot[{Sin[x]==Cos[y],x+y==1},{x,0.1},{y,0.2}]
 Out[16]=> x -> 1.2854, y -> -0.285398}

٣ . إيجاد القيم الصغرى Numerical Minimization

فى برنامج ماتيماتكا الأمر **FindRoot** يقدم لنا طريقة عددية لإيجاد نقط تنعدم عندها الدالة وفى بعض الأحيان يكون من المهم إيجاد نقط تكون عندها الدالة $f(x)$ اصغر ما يمكن أي إيجاد نقط نهايات صغرى محلية **local minimum** للدالة $f(x)$ ويمكن الحصول على هذه النقط عن طريق تطبيق الأمر **FindRoot** على مشتقة الدالة $f(x)$ ، وماتيماتكا يقدم الأمر **FindMinimum** لحساب نقط نهايات صغرى للدالة $f(x)$ بطريقة مباشرة وكذلك القيم الصغرى للدالة عند هذه النقط وباستخدام العلاقة $\max(f) = -\min(-f)$ يمكن إيجاد نقط النهايات العظمى للدالة $f(x)$.

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
FindMinimum[f,{x,x0}]	البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة f بالقرب من نقطة البداية x_0 وحساب القيمة الصغرى للدالة.
FindMinimum[f,{x,xstart,xmin,xmax}]	البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة f بالقرب من نقطة البداية $x=xstart$ وبحيث يتم البحث فقط داخل النطاق من $x=xmin$ الى $x=xmax$ وحساب القيمة الصغرى للدالة .
FindMinimum[f,{x,{x0,x1}}]	البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة f بالقرب من القيم الابتدائية x_0, x_1 وحساب القيمة الصغرى للدالة ويستخدم الأمر FindMinimum بهذه الصورة عندما يكون من الصعب إيجاد التفاضل للدالة f
FindMinimum[f,{x,x0},{y,y0},...]	البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة فى أكثر من متغير $f(x, y, \dots)$ بالقرب من القيم الابتدائية $x=x_0, y=y_0, \dots$ وحساب القيمة الصغرى للدالة .

In[1]:= f[x_]:=1-3x^2+x^3+x^4;Plot[f[x],{x,-2.5,1.5}]



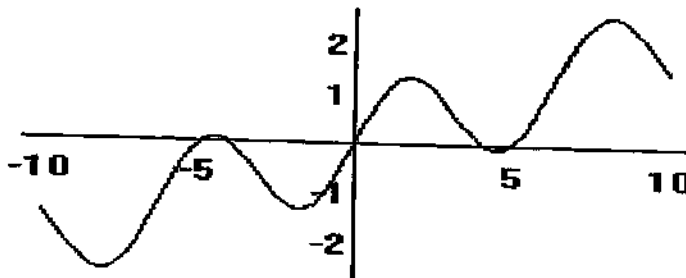
تعريف الدالة
 $f(x) = 1 - 3x^2 + x^3 + x^4$
 ثم رسمها في الفترة $[-2.5, 1.5]$
 ونلاحظ أن الدالة لها نقطتي نهاية
 صفري عملية في نطاق التعريف

In[2]:=FindMinimum[f[x],{x,-2}] للبحث عن نقطة نهاية صفري عملية للدالة بالقرب من
 Out[2]={-4.24791, {x->-1.65587}} النقطة $x = -2$ وإيجاد القيمة الصفري للدالة عندها

In[3]:=FindMinimum[f[x],{x,0.5}] للبحث عن نقطة نهاية صفري عملية للدالة بالقرب من
 Out[3]={-0.0450589, {x->0.905869}} النقطة $x = 1$ وإيجاد القيمة الصفري للدالة عندها

In[4]:=maxf=-FindMinimum[-f[x],{x,-5}] للبحث عن نقطة نهاية عظمى عملية للدالة بالقرب من
 Out[4]={1., {- {x->9.54982 10⁻¹³}}} من النقطة $x = .5$ وإيجاد القيمة العظمى للدالة عندها

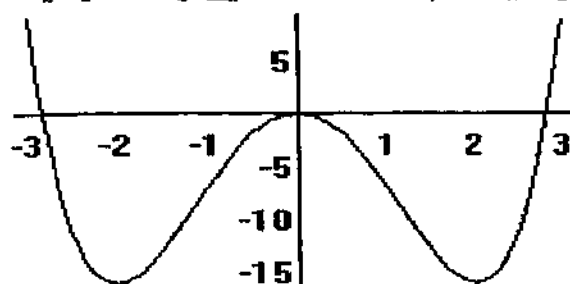
In[5]:= Plot[Sin[x]+x/5,{x,-10,10}]



رسم الدالة
 $\sin x + x/5$
 على الفترة $[-10, 10]$
 ونلاحظ أن الدالة لها أكثر
 من نقطة نهاية صفري عملية
 في نطاق التعريف .

In[6]:=FindMinimum[Sin[x]+x/5,{x,1}] للبحث عن نقطة نهاية صفري عملية للدالة بالقرب من
 Out[6]={-1.33423, {x->-1.77215}} من النقطة $x = 1$ جاد القيمة الصفري للدالة عندها

In[7]:= r3[x_]:=x^4-8x^2;Plot[r3[x],{x,-3,3}]



تعريف الدالة

$$r3(x) = x^4 - 8x^2$$

ثم رسمها في الفترة $[-3, 3]$

ونلاحظ أن الدالة لها نقطتين نهاية

صغرى محلية في نطاق التعريف .

In[8]:=FindMinimum[r3[x],{x,1.5}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من

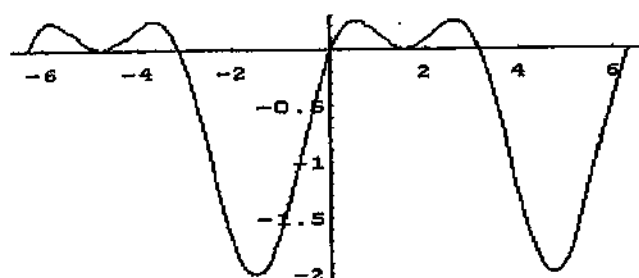
Out[8]={-16., {x -> 2.}} النقطة $x = 1.5$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[9]:=FindMinimum[r3[x],{x,-1,-2.5,0}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة

Out[9]={-16., {x -> -2.}} بالقرب من النقطة $x = -1$ وفي النطاق

$[-2.5, 0]$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[10]:= r4[x_]:=Sin[x]-Sin[x]^2; Plot[r4[x],{x,-2Pi,2Pi}]



تعريف الدالة

$$r4(x) = \sin(x) - \sin^2(x)$$

ثم رسمها في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$

ونلاحظ أن الدالة لها أكثر من نقطة

نهاية صغرى محلية في نطاق التعريف .

In[11]:= FindMinimum[r4[x],{x,6}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة $r4[x]$ بالقرب من

Out[11]={-2., {x -> 4.71239}} النقطة $x = 6$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[12]:= FindMinimum[r4[x],{x,-3}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة $r4[x]$ بالقرب من

Out[12]={-2., {x -> -1.5708}} النقطة $x = -3$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

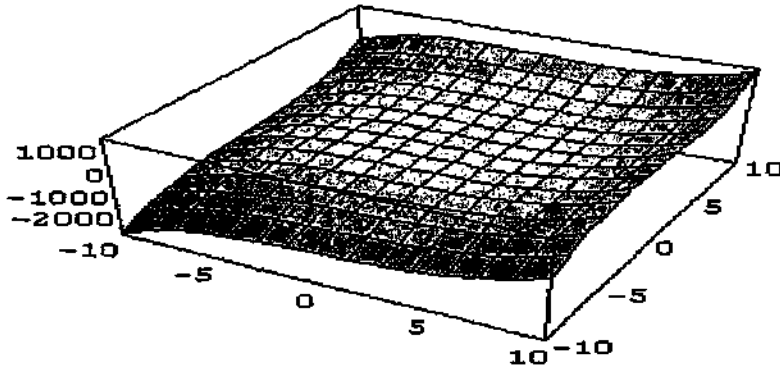
In[13]:= FindMinimum[r4[x],{x,-4}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة $r4[x]$ بالقرب من

Out[13]={2.22045 10⁻¹⁶, {x -> -4.71239}} النقطة $x = -4$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[14]:= FindMinimum[-r4[x],{x,-4}] للبحث عن نقطة نهاية عظمى محلية للدالة $r4[x]$ بالقرب من

Out[14]={0.25, {x -> -3.66519}} النقطة $x = -4$ وإيجاد القيمة العظمى للدالة عندها

In[15]:= f[x_,y_]:=x^3+y^3-3x y; Plot3D[f[x,y],{x,-10,10},{y,-10,10}]

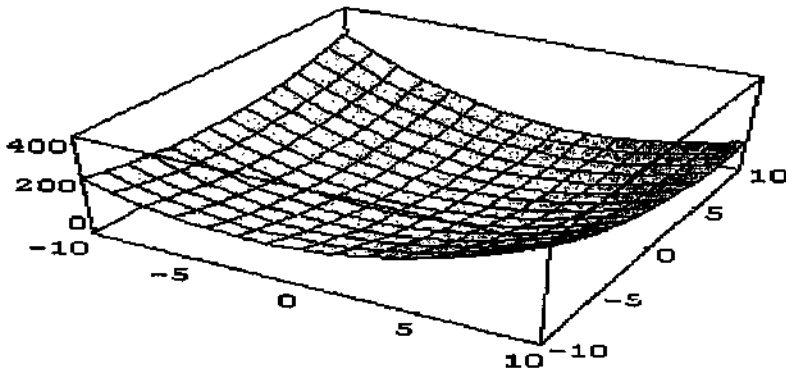


تعريف الدالة $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ثم رسمها في الفراغ في المنطقة $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$

In[16]:= FindMinimum[f[x,y],{x,0.4},{y,0.5}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة

Out[16]:={-1., {x -> 1., y -> 1.}} بالقرب من $x=0.4$, $y=0.5$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها .

In[17]:= h[x_,y_]:=2x^2+y^2-x y-7y; Plot3D[h[x,y],{x,-10,10},{y,-10,10}]



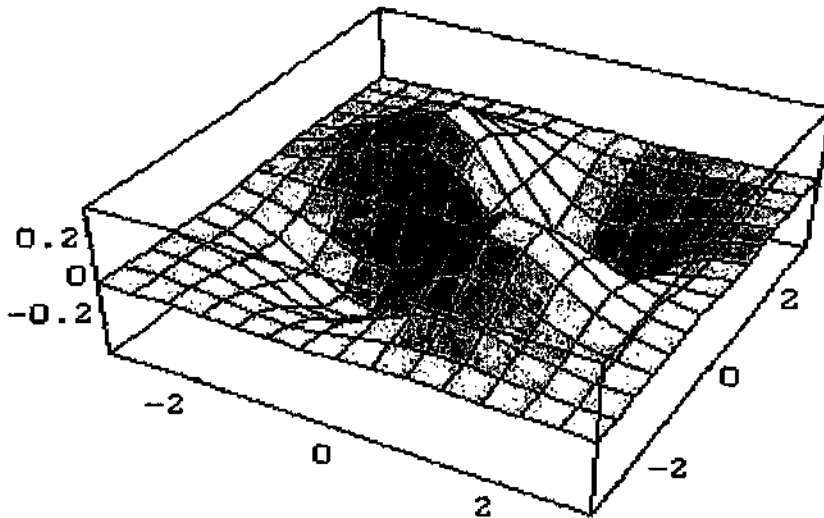
تعريف الدالة $h(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y$ ثم رسمها في الفراغ في المنطقة $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$

In[18]:= FindMinimum[h[x,y],{x,2},{y,5}]

Out[18]:={-14., {x -> 1., y -> 4.}}

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من $x=0.4$, $y=0.5$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها .

```
In[19]:= g[x_,y_]:=-x y Exp[-(x^2+y^2)/2];
          Plot3D[g[x,y],{x,-Pi,Pi},{y,-Pi,Pi}]
```



تعريف الدالة $g(x,y) = -x y \text{Exp}[-(x^2 + y^2)/2]$ ثم رسمها في الفراغ في المنطقة $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$

```
In[20]:=FindMinimum[g[x,y],{x,0.6},{y,0.5}]
```

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة $(0.6, 0.5)$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

```
Out[20]={-0.367879, {x -> 1., y -> 1.}}
```

```
In[21]:=FindMinimum[g[x,y],{x,-1.5},{y,-0.5}]
```

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من $(-1.5, -0.5)$ وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

```
Out[21]={-0.367879, {x -> -1., y -> -1.}}
```

```
In[22]:=FindMinimum[-g[x,y],{x,-1.5},{y,0.5}]
```

للبحث عن نقطة نهاية عظمى محلية للدالة بالقرب من $(-1.5, 0.5)$ وإيجاد القيمة العظمى للدالة عندها

```
Out[22]={0.367879, {-x -> -1., -y -> 1.}}
```

```
In[23]:=FindMinimum[-g[x,y],{x,1.5},{y,-0.5}]
```

للبحث عن نقطة نهاية عظمى محلية للدالة بالقرب من $(1.5, -0.5)$ وإيجاد القيمة العظمى للدالة عندها

```
Out[23]={0.367879, {-x -> 1., -y -> -1.}}
```

٤. الحساب العددي للمجموع وحواصل الضرب Numerical Sum and Product

فى برنامج ماتيماتيكا أمر المجموع $\text{Sum}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}\}]$ يقوم بحساب قيمة مضبوطة للمجموع $\sum_{i=\text{imin}}^{\text{imax}} f$ حتى إذا كان المجموع فى صورة رمزية symbolic وفى بعض الحالات لا يستطيع ماتيماتيكا حساب الناتج المضبوط للجمع عن طريق الدالة Sum خاصة إذا كان $\text{imax} = \infty$ ولمثل هذه الحالات فإنه يمكن حساب قيمة عددية تقريبية للمجموع باستخدام الدالة N بالصورة

$\text{Sum}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}\}]/N$ أو فى الصورة $N[\text{Sum}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}\}]]$

وماتيماتيكا يقدم الأمر $N\text{Sum}$ لحساب قيمة عددية تقريبية للمجموع مباشرة دون الحاجة الى حساب القيمة المضبوطة والتي تتطلب العديد من العمليات وبالمثل يوجد فى ماتيماتيكا الأمر $N\text{Product}$ لحساب قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
$N\text{Sum}[f, \{i, \text{imax}\}]$	إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=1}^{\text{imax}} f$
$N\text{Sum}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}\}]$	إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=\text{imin}}^{\text{imax}} f$
$N\text{Sum}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}, \text{step}\}]$	إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=\text{imin}}^{\text{imax}} f$ من $i=\text{imin}$ الى $i=\text{imax}$ بخطوة مقدارها step
$N\text{Sum}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}\}, \{j, \text{jmin}, \text{jmax}\}, \dots]$	إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=\text{imin}}^{\text{imax}} \sum_{j=\text{jmin}}^{\text{jmax}} f$
$N\text{Product}[f, \{i, \text{imin}, \text{imax}\}]$	إيجاد قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب $\prod_{i=\text{imin}}^{\text{imax}} f$

In[1]:=Sum[1/i^3,{i,1,Infinity}] ماتيماتكا لم يتمكن من حساب قيمة مضبوطة
Out[1]=Sum[i^-3 , {i, 1, Infinity}] للمجموع باستخدام دالة Sum فقط

In[2]:=Sum[1/I^3,{I,1,Infinity}]/N وعند تطبيق الدالة N أمكن الحصول على
Out[2]=1.20206 قيمة عددية تقريبية للمجموع

In[3]:=NSum[1/i^3,{i,1,Infinity}] باستخدام دالة NSum أمكن مباشرة إيجاد
Out[3]=1.20206 قيمة عددية تقريبية للمجموع

In[4]:=Sum[Exp[-n],{n,0,5}] ماتيماتكا لم يتمكن من حساب قيمة مضبوطة
Out[4]=1 + E^-5 + E^-4 + E^-3 + E^-2 + E^-1 للمجموع باستخدام دالة Sum بالرغم
 من أن $\text{imax} = 5$ فقط

In[5]:=NSum[Exp[-n],{n,0,Infinity}] باستخدام دالة NSum أمكن مباشرة إيجاد
Out[5]=1.58198 قيمة عددية تقريبية للمجموع حتى مالا نهاية

In[6]:=NSum[1/n!,{n,0,Infinity}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لمجموع

Out[6]=2.71828

المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

In[7]:=NSum[1/(n(n+1)(n+2)),{n,1,Infinity}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لمجموع

Out[7]=0.25

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

In[8]:=NSum[1/(i^2+j^2),{i,1,5},{j,1,10}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لمجموع المتسلسلة

Out[8]=2.39932

$\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{10} \frac{1}{i^2+j^2}$

In[9]:=Nproduct[1/i^2,{i,1,5}]

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب $\prod_{i=1}^5 \frac{1}{i^2}$

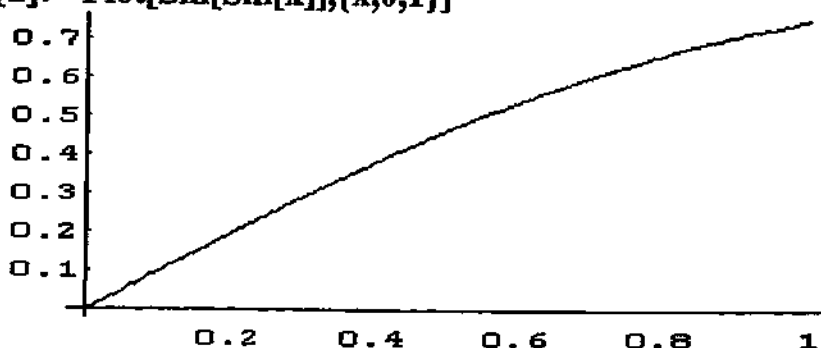
Out[9]=0.0000694444

٥ . التكامل العددي Numerical Integration

دالة التكامل **Integrate** تقوم بحساب التكامل $\int f(x) dx$ بصورة رمزية **symbolic** حيث يتعامل برنامج ماتيماتكا مع دالة التكامل $f(x)$ ويقوم بإجراء متابعة من القواعد والتحويلات الرمزية وصولاً إلى القيمة المضبوطة للتكامل في صورة رمزية وتوجد بعض الدوال لا تستطيع دالة **Integrate** الحصول على قيم مضبوطة لتكاملاتها المحددة **definite** وفي هذه الحالة يمكن استخدام الدالة **N** لحساب قيمة عددية للتكامل ، وفي ماتيماتكا يوجد الدالة **NIntegrate** لحساب قيمة عددية تقريبية للتكامل مباشرة دون الحاجة إلى حساب القيمة المضبوطة حيث يتم حساب متابعة من القيم العددية لدالة التكامل عند نقاط خاصة في نطاق التكامل ثم تستخدم هذه القيم في الوصول إلى قيمة عددية تقريبية جيدة للتكامل .

$N[Integrate[f,\{x,xmin,xmax\}]] \int_{xmin}^{xmax} f(x) dx$	<p>حساب قيمة مضبوطة للتكامل</p> <p>أولاً ثم إيجاد قيمة عددية تقريبية بعد ذلك</p>
$NIntegrate[f,\{x,xmin,xmax\}] \int_{xmin}^{xmax} f(x) dx$	<p>حساب قيمة عددية تقريبية مباشرة للتكامل</p>
$NIntegrate[f,\{x,xmin,xmax\},\{y,ymin,ymax\},...]$	<p>حساب قيمة عددية</p> <p>تقريبية مباشرة للتكامل المتعدد</p> $\int_{xmin}^{xmax} \int_{ymin}^{ymax} f(x,y) dx dy$
$NIntegrate[f,\{x,xmin,x1,x2,...,xmax\}]$	<p>حساب قيمة عددية تقريبية مباشرة</p> <p>للتكامل مع مراعاة النقاط الشاذة $x1,x2,...$ لدالة التكامل</p> $\int_{xmin}^{xmax} f(x) dx$

In[1]:= Plot[Sin[Sin[x]],{x,0,1}]



In[2]:=Integrate[Sin[Sin[x]],{x,0,1}]

ماتيماتكا لا يستطيع الحصول على قيمة

Out[2]= On::none: Message SeriesData::

مضبوطة للتكامل

csa not found

$$\int_0^1 \sin(\sin(x)) dx$$

In[3]:=N[%]

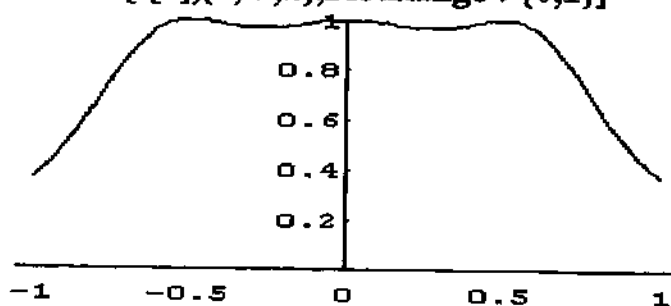
بواسطة الدالة N يمكن إيجاد قيمة

Out[3]=0.430606

عددية تقريبية للتكامل

In[4]:=f[x_]:=Exp[-x^2 Cos[Pi x]^2];

Plot[f[x],{x,-1,1},PlotRange->{0,1}]



In[5]:= NIntegrate[f[x],{x,-1,1}]

لحساب قيمة عددية تقريبية مباشرة للتكامل

Out[5]=1.71167

$$\int_{-1}^1 e^{-x^2 \cos^2(\pi x)} dx$$

In[6]:=NIntegrate[Exp[-2x],{x,0,Infinity}] لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل
 Out[6]=0.5 $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$

In[7]:=NIntegrate[Sqrt[4+x^3],{x,0,3}] لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل
 Out[7]=9.27972 $\int_0^3 \sqrt{4+x^3} dx$

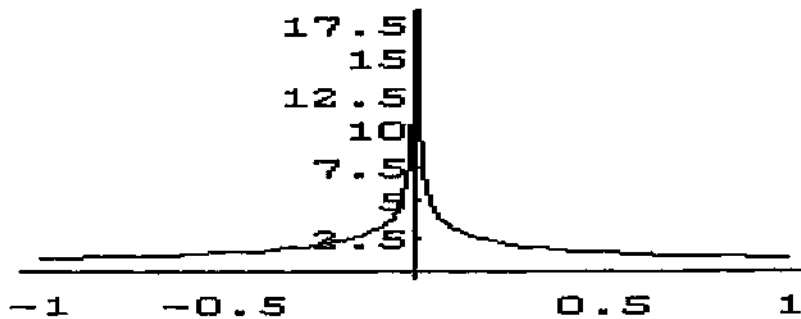
In[8]:=NIntegrate[Sin[x]/(Pi+x),{x,0,Pi}] لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل
 Out[8]=0.433785 $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x + \pi} dx$

In[9]:=NIntegrate[Exp[-x^2],{x,0,2}] لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل
 Out[9]=0.882081 $\int_0^2 e^{-x^2} dx$

In[10]:=NIntegrate[Cos[x^2],{x,-1,1}] لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل
 Out[10]=1.80905 $\int_{-1}^1 \cos(x^2) dx$

In[11]:=NIntegrate[1/(x-1)^(1/3),{x,-2,1,2}] لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل
 Out[11]=3.06006 - 2.70211 I $\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$
 مع مراعاة النقطة الشاذة $x=1$

In[12]:=Plot[1/Sqrt[Abs[x]],{x,-1,1}]

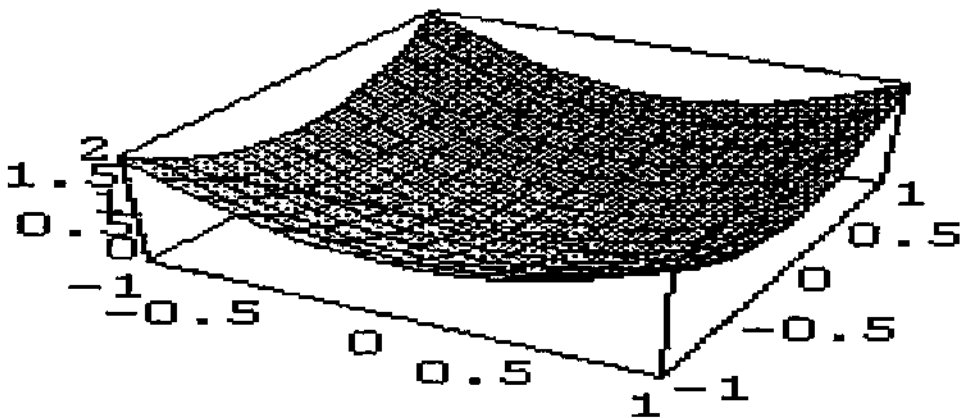


لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$ مع مراعاة النقطة الشاذة $x=0$

In[13]:=NIntegrate[1/Sqrt[Abs[x]],{x,-1,0,1}]

Out[13]=4.

In[14]:=Plot3D[x^2+y^2,{x,-1,1},{y,-1,1}]



لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائي $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx dy$

In[15]:=NIntegrate[x^2+y^2,{x,-1,1},{y,-1,1}]

Out[15]=2.66667

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائي

$$\int_{-5}^5 \int_{-3}^3 e^{\frac{-(x-y)^2}{1+(x+y)^2}} dx dy$$

In[16]:=NIntegrate[Exp[-(x-y)^2]/(1+(x+y)^2),{x,-3,3},{y,-5,5}]
Out[16]=2.48738

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائي

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x (2x^2 + y^2) dy dx$$

In[17]:=NIntegrate[2 x^2+y^2,{x,0,1},{y,x^2,x}]
Out[17]=0.135714

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثلاثي

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{y+z} x y z dx dy dz$$

In[18]:= NIntegrate[x y z,{z,0,1},{y,0,z},{x,0,y+z}]
Out[18]=0.118056

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثلاثي

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dx dy$$

In[19]:=NIntegrate[zSqrt[x^2+y^2+z^2],{y,0,3},{x,0,Sqrt[9-y^2]},
{z,0,Sqrt[9-x^2-y^2]}}]
Out[19]=38.1704

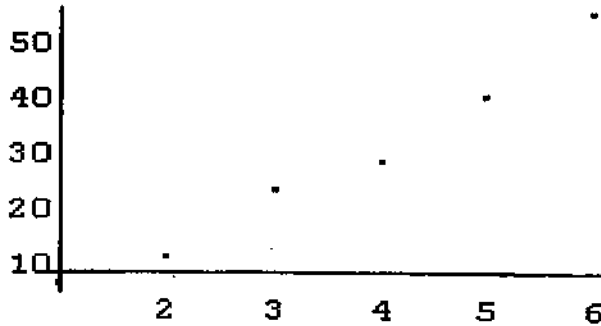
٦ . التقريب بالمربعات الصغرى Least - squares

في داخل بناء ماتيماتكا **built-in** يوجد إمكانيات متعددة للحصول على كثيرة حدود المربعات الصغرى التي تلائم قائمة من البيانات والفكرة الأساسية التي يعتمد عليها ماتيماتكا ملائمة البيانات هو اخذ قائمة من الدوال التي نقوم بتحديدتها ثم محاولة إيجاد تركيبة خطية من هذه الدوال معا لتقريب البيانات المعطاة باستخدام قاعدة المربعات الصغرى ويتم ذلك عن طريق جعل المقدار $\sum_i |y_i - f_i|^2$ اصغر ما يمكن حيث y_i من البيانات المعطاة ، f_i هي القيمة من التركيبة الخطية للدوال التي قام المستخدم بتحديدتها ويتم ذلك باستخدام الدالة **Fit** والصيغة العامة لها كالآتي :

Fit[data,funcs,vars]	ملائمة البيانات data باستخدام تركيبة خطية من الدوال funcs في المتغيرات vars
Fit[{y1,y2,...},{f1,f2,...},x]	إيجاد افضل تركيبة خطية من الدوال f1, f2,... تلائم النقط (1,y1),(2,y2),... حيث تم اعتبار قيم x المناظرة لقيم y_i هي x_i = i
Fit[{x1,y1},{x2,y2},...,{f1,f2,...},x]	إيجاد افضل تركيبة خطية من الدوال f1,f2,... تلائم النقط (x1,y1),(x2,y2),...

Fit[{y1,y2,...},{1,x},x]	إيجاد افضل خط مستقيم linear fit يلائم البيانات (1,y1),(2,y2), ...
Fit[{y1,y2,...},{1,x,x^2},x]	إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية Quadratic fit تلائم البيانات (1,y1),(2,y2), ...
Fit[data,Table[x^i,{i,0,n}],x,x]	إيجاد افضل كثيرة حدود من درجة n تلائم البيانات data

In[1]:=data1={6,11,23,28,40,55}; m1=ListPlot[data1]



تعريف قائمة data1 من الأعداد
ثم تحديد مواضع هذه الأعداد
في المستوى

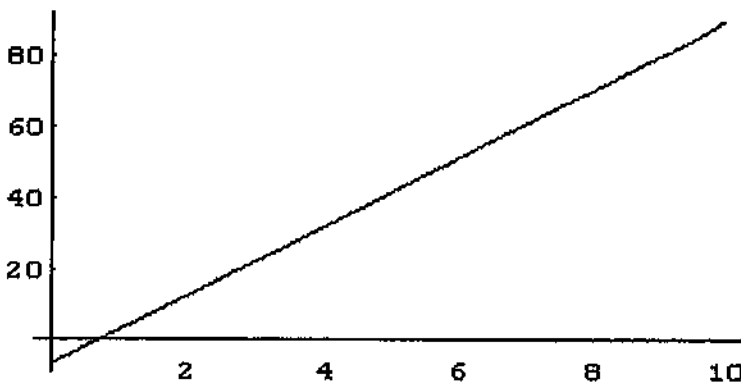
In[2]:= f1=Fit[data1,{1,x},x]

إيجاد معادلة الفضل خط مستقيم

Out[2]=-6.53333 + 9.62857 x

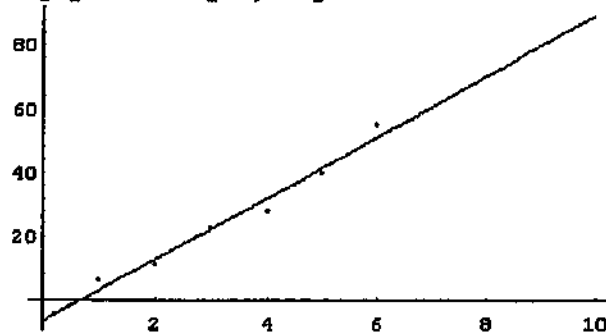
يلائم قائمة البيانات data1

In[3]:=s1=Plot[f1,{x,0,10}]



رسم الخط المستقيم f1
الناتج من الدالة Fit

In[4]:=Show[s1,m1]



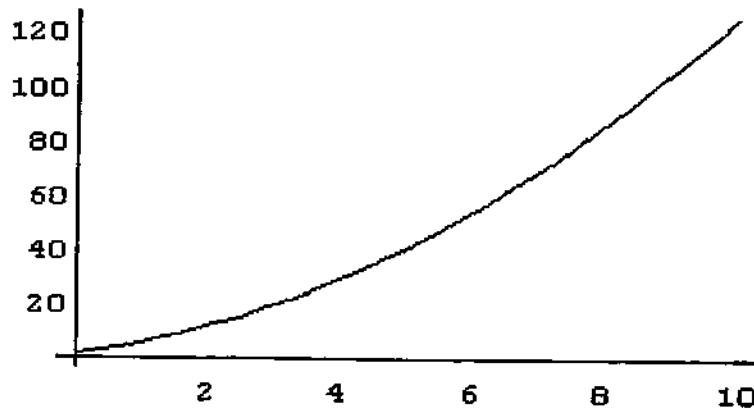
إظهار رسم الخط المستقيم الناتج من
الدالة Fit مع رسم القائمة data1

In[5]:= f2=Fit[data1,{1,x,x^2},x] إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية

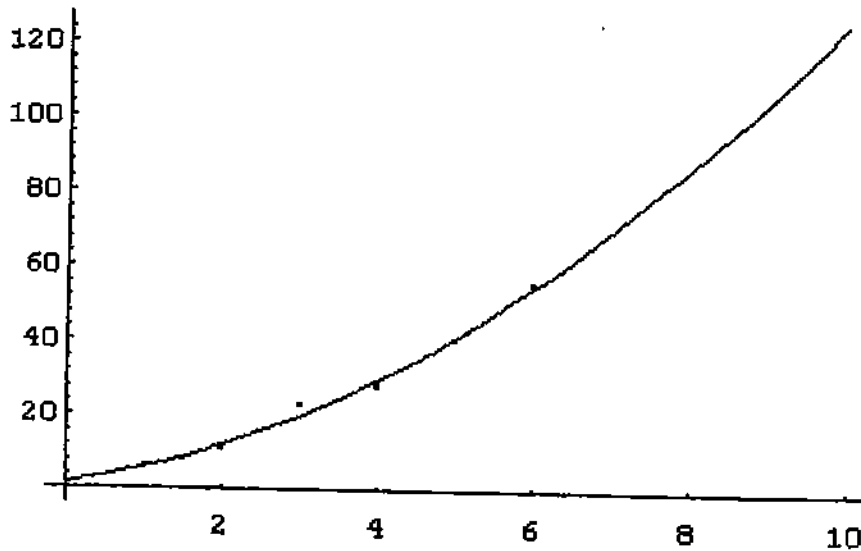
Out[5]=3.37857+1.8x+ 0.892857 x² data1 تلائم قائمة البيانات

In[6]:= s2=Plot[f2,{x,0,10}] رسم كثيرة الحدود f2 الناتجة من

الدالة Fit



In[7]:= Show[m1,s2]



إظهار رسم كثيرة الحدود s2 الناتجة من الدالة Fit مع رسم القائمة data1

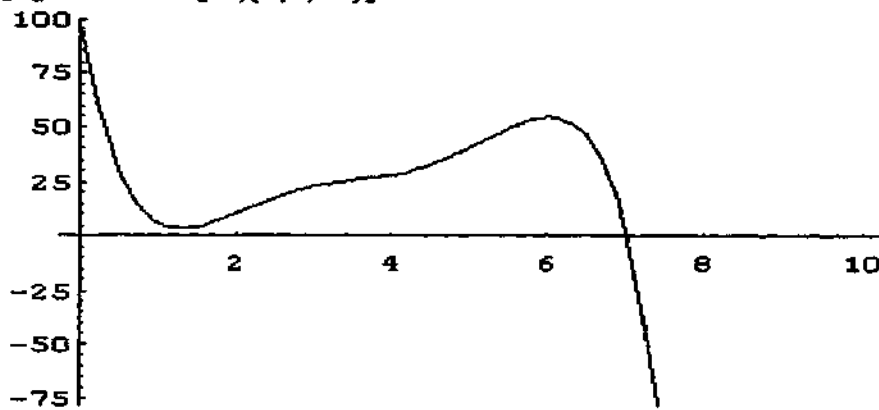
إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الخامسة تلائم قائمة البيانات data1 ثم رسم كثيرة

الحدود f3 الناتجة من الدالة Fit

In[8]:= f3=Fit[data1,Table[x^i,{i,0,5}],x]

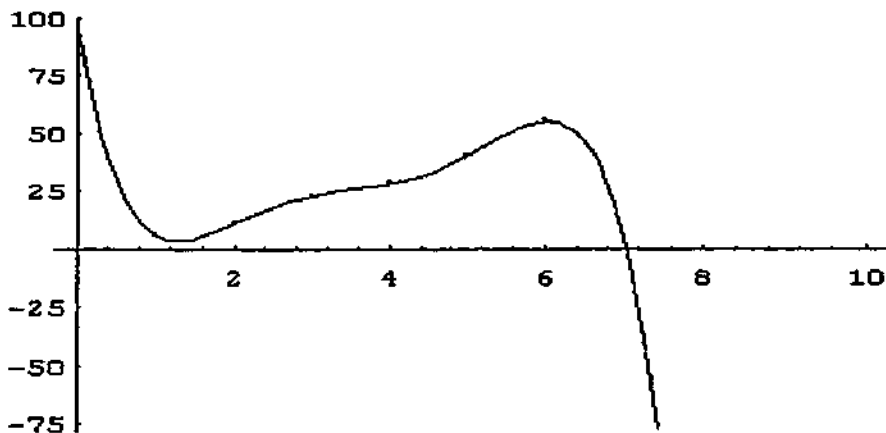
Out[8]=96. - 194.533 x + 144.583 x² - 46.5833 x³ +
6.91667 x⁴ - 0.383333 x⁵

In[9]:=s3=Plot[f3,{x,0,10}]



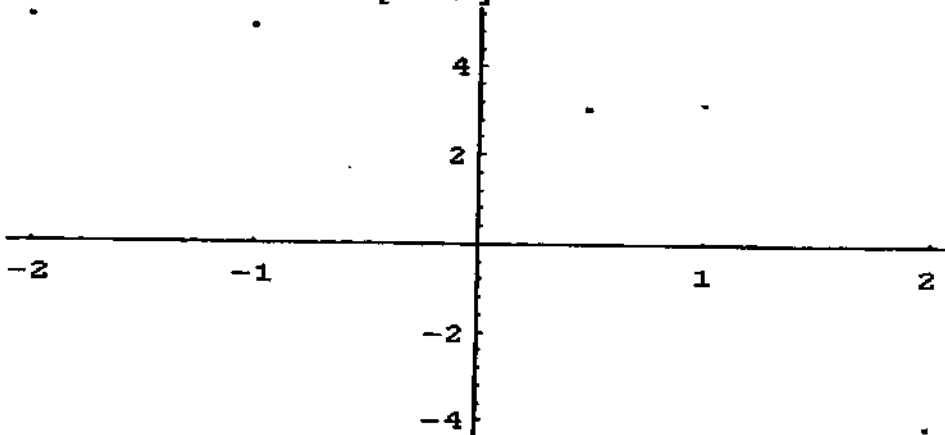
In[10]:= Show[m1,s3]

إظهار رسم كثيرة الحدود s3 الناتجة من
الدالة Fit مع رسم القائمة data1



تعريف قائمة **data2** من الأعداد ثم تحديد مواضع هذه الأعداد في المستوى

```
In[11]:= data2={{-2,5.1},{-1,4.9},{0.5,3},{1,3.1},{2,-4.1}};
m2=ListPlot[data2]
```

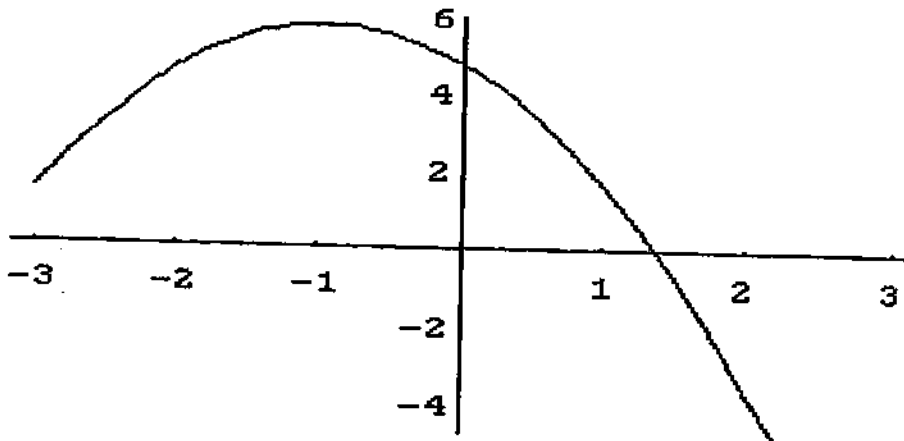


إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية تلائم قائمة البيانات **data2** ثم رسم كثيرة

الحدود **f4** الناتجة من الدالة **Fit**

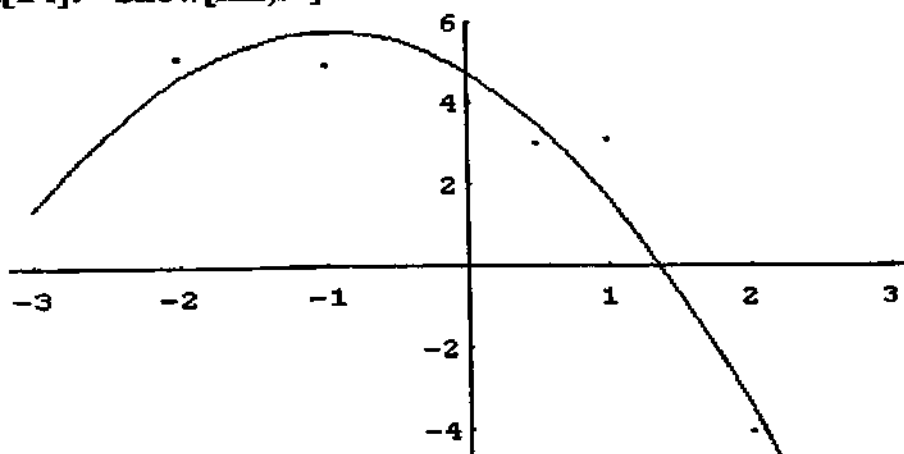
```
In[12]:= f4=Fit[data2,{1,x,x^2},x]
Out[12]=4.75476 - 2.04354 x - 1.04898 x^2
```

```
In[13]:= s4=Plot[f4,{x,-3,3}]
```



إظهار رسم كثيرة الحدود s4 الناتجة من الدالة Fit مع رسم القائمة data2

In[14]:= Show[m2,s4]



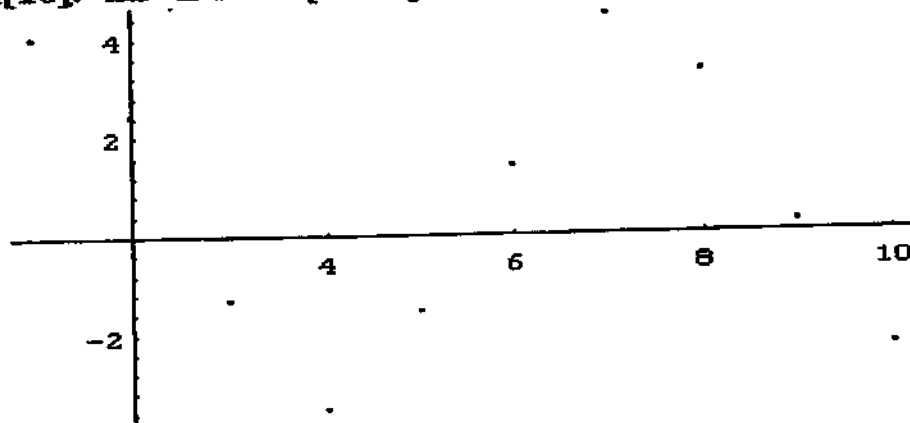
وتعتبر كثريات الحدود هي الأكثر استخداما مع دالة Fit ولكن يمكن استخدام أي دوال أخرى في قائمة الدوال نرى أنها مناسبة للبيانات مثل الدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية والزائدية ... الخ .

تعريف قائمة data3 من الأعداد ثم تحديد مواضع هذه الأعداد في المستوى

In[15]:=data3=Table[N[Random[]+2Cos[x]+3Sin[x]],{x,1,10}]

Out[15]={4.02232, 2.45486, -1.32769, -3.54897, -1.54028,
1.4028, 4.47493, 3.28246, 0.177847, -2.3534}

In[16]:=m3=ListPlot[data3]

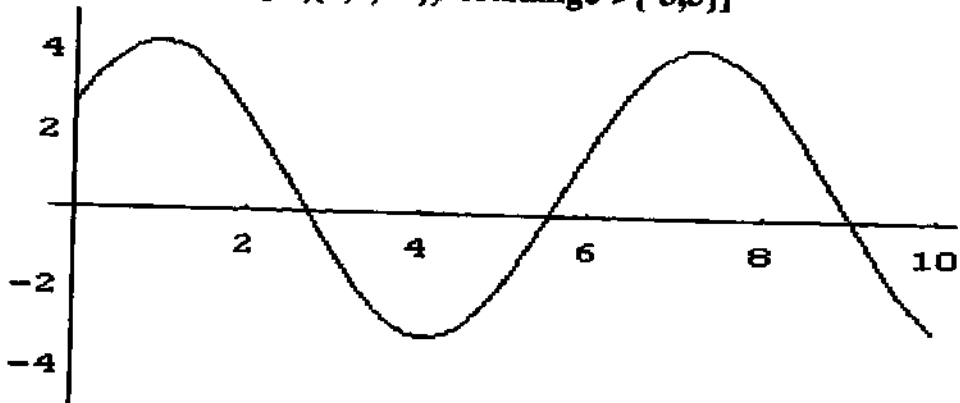


إيجاد الفضل تركيبة خطية من مجموعة الدوال $\{1, \cos(x), \sin(x)\}$ بحيث تلائم قائمة البيانات **data3** ثم رسم المعادلة **f5** الناتجة من الدالة **Fit**

In[17]:=f5=Fit[data3,{1,Cos[x],Sin[x]},x]

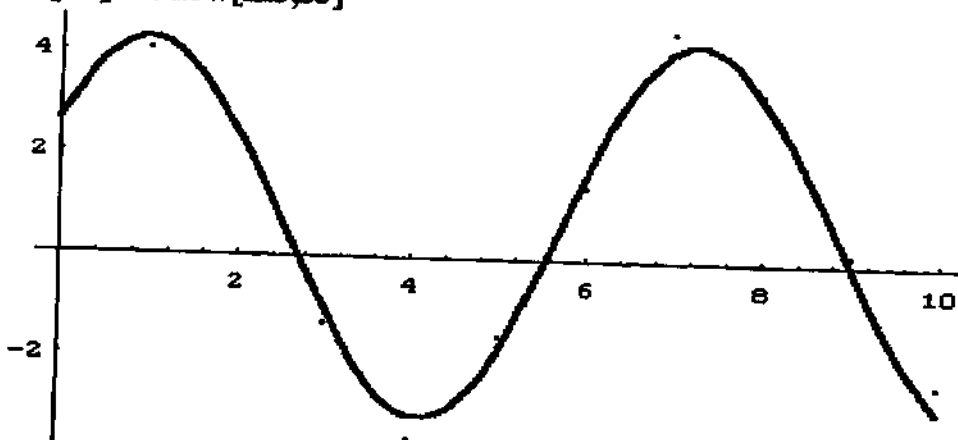
Out[17]=0.56281 + 2.04344 Cos[x] + 3.05647 Sin[x]

In[18]:=s5=Plot[f5,{x,0,10},PlotRange->{-5,5}]

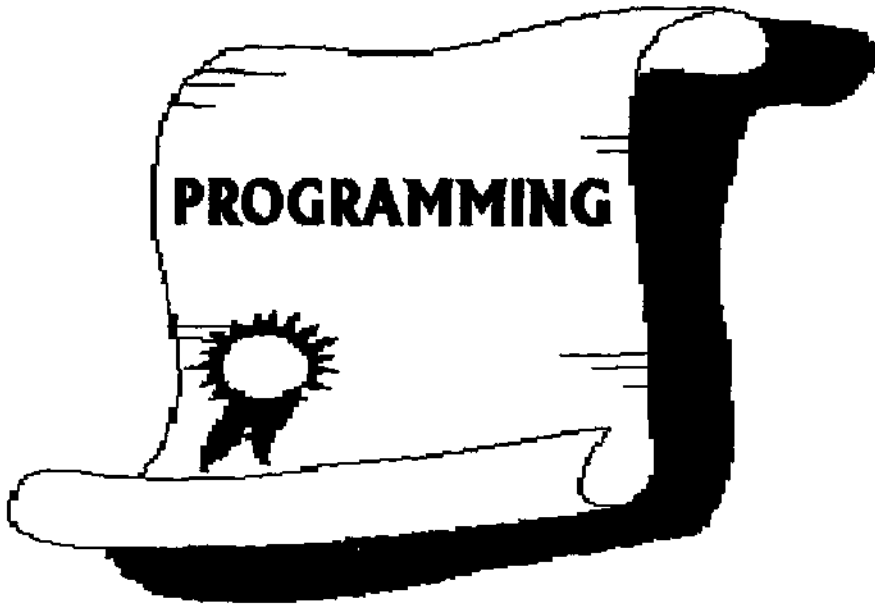


إظهار رسم المعادلة **s5** الناتجة من الدالة **Fit** مع رسم القائمة **data3**

In[19]:=Show[m3,s5]



الباب السابع البرمجة في ماثيماتيك



في هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيك
والخاصة بالموضوعات الآتية :

Procedure

١. منظومة الإجراءات

Loops

٢. الحلقات التكرارية

Conditionals

٣. أوامر الانتقال المشروط

الباب السابع

البرمجة في ماثيماتيكا

عند بناء الحسابات في ماثيماتيكا غالبا ما نحتاج أن نربط مجموعة الأوامر معا ويمكن أن يتم ذلك باستخدام منظومة إجراءات Procedure .

١ . منظومة الإجراءات Procedure

منظومة الإجراءات هي عبارة عن متتابعة من أوامر أو تعبيرات ماثيماتيكا بحيث يفصل بين كلا منها علامة الفصلة المنقوطة ; وقيمة التعبير الأخير في المنظومة يمثل الناتج النهائي .

تعريف منظومة تتكون من مجموعة من الأوامر

Command1;Command2;...

```
In[1]:=r=(1+x)^2;r=Expand[r];r-1  
Out[1]= 2 x + x2
```

في هذا المثال نلاحظ أن منظومة الإجراءات عبارة عن ثلاثة تعبيرات حسابية يفصل كل منها عن الآخر بفسلة منقوطة كما نلاحظ أن الناتج النهائي هو قيمة التعبير الأخير (r - 1) في منظومة الإجراءات .

In[2]:= f[x_]:= (t=(1+x)^2; t=Expand[t]) ويمكن تعريف الدالة كمنظومة إجراءات
حيث نستخدم الأقواس () لتوضيح
أن كل الإجراءات معا تمثل الدالة f

In[3]:= f[a] لحساب قيمة الدالة f عند $x=a$
Out[3]= 1+2a+a²

In[4]:= t عند الاستعلام عن قيمة t نجد أن المتغير
Out[4]= 1 + 2 a + a² t أصبح يمثل القيمة 1+2a+a²
ويحتفظ بها حتى بعد الخروج من المنظومة .

وفي كثير من الأحيان نحتاج الى أن نجعل المتغيرات المستخدمة داخل أى منظومة إجراءات
كمتغيرات موضعية (Local) بمعنى أن هذه المتغيرات تحتفظ بالقيم داخل منظومة الإجراءات
فقط ولكن تفقد هذه القيم بعد إنهاء الحسابات فى المنظومة والخروج منها ويتم عمل ذلك فى
ماثميكا باستخدام الأمر Block أو الأمر Module كالآتى :

للإعلان عن أن المتغيرات x,y,... تمثل متغيرات موضعية داخل منظومة الإجراءات procedure Block[{x, y, ...}, procedure] Or Module[{x, y, ...}, procedure]	
تحديد القيم الابتدائية ... $x = x_0, y = y_0$ للمتغيرات الموضعية داخل منظومة الإجراءات procedure Block[{x=x ₀ , y=y ₀ , ...}, procedure] Or Module[{x = x ₀ , y=y ₀ , ...}, procedure]	

وبذلك فإنه بواسطة الأمر `Block` أو الأمر `Module` يمكن تعريف أى متغيرات داخل منظومة الإجراءات الواحدة دون التأثير على القيم بخارج المنظومة وبالتالي يمكن تعريف نفس المتغير الموضعى داخل أكثر من منظومة إجراءات .

`In[5]:=` عند استخدام الأمر `Block` فى تعريف
`g[x_]:=Block[{u},u=(1+x)^2;u=Expand[u]]` الدالة `g` فإن `u` يعامل كمغير موضعى

`In[6]:= g[a]` لحساب قيمة الدالة `g` عند `x = a`
`Out[6]= 1 + 2a + a2`

`In[7]:=u` عند الاستعلام عن قيمة `u` نلاحظ عدم
`Out[7]=u` وجود قيمة لأن `u` متغير موضعى

`In[8]:=x=5;` تعريف `x=5` خارج المنظومة ثم استخدام
`Module[{x},x=Random[];Print[x];]` الأمر `Module` واعتبار أن `x` متغير موضعى
`Out[8]=0.863718` وطباعة قيمة عشوائية للمتغير `x`

`In[9]:=?x` عند الاستعلام عن قيمة `x` نلاحظ أن
`Out[9]=Global`x` `x = 5` وهى القيمة الموجودة خارج
`x = 5` الأمر `Module`

٢ . الحلقات التكرارية Loops

منظومة الإجراءات تسمح بتنفيذ مجموعة من تعبيرات ماتيماتيكا وفقا لسرّيب هذه التعبيرات داخل منظومة الإجراءات وفي كثير من الأحيان نحتاج الى تنفيذ بعض العمليات بصورة متكررة ويتم ذلك داخل ماتيماتيكا باستخدام أوامر خاصة بالحلقات المتكررة Loops حيث تعمل الحلقات المتكررة على تكرار مجموعة متتالية من الأوامر بصورة متكررة لعدد محدد من المرات مع إمكانية التغيير الأوتوماتيكي لقيم المتغيرات داخل الحلقات التكرارية ، ومن أوامر ماتيماتيكا الخاصة بالحلقات التكرارية هو الأمر Do والذي يستخدم بصورة مشابهة كما فى لغات البرمجة مثل فورتران FORTRAN والأمر Do له استخدامات متعددة وصيغته العامة موضحة بالجدول الآتى :

الصيغة العامة للأمر	الوظيفة التي يقوم بها الأمر
Do[expr,{n}]	حساب قيمة expr عدد n من المرات
Do[expr,{i,imax}]	حساب قيمة expr بصورة متكررة وفقا للعداد i من i=1 الى i=imax بخطوة تساوى 1
Do[expr,{i,imin,imax}]	حساب قيمة expr بصورة متكررة وفقا للعداد i من i=imin الى i=imax بخطوة تساوى 1
Do[expr,{i,imin,imax,istep}]	حساب قيمة expr بصورة متكررة وفقا للعداد i من i=imin الى i=imax بخطوة تساوى istep
Do[expr,{i,imin,imax}, {j,jmin,jmax}]	حساب قيمة expr لقيم i, j المعطاة

In[1]:=t=x;Do[t=2(1+t),{3}];t
Out[1]=2 (1 + 2 (1 + 2 (1 + x)))

في هذه الحلقة يتم حساب التعبير
 $t=2(1+t)$ ثلاث مرات حيث $t=x$

In[2]:=Do[Print[m^2],{m,3}]
Out[2]= 1
4
9

في هذه الحلقة يتم طباعة m^2 لقيم
 m من 1 الى 3

In[3]:=Do[a=i^2+3j;Print[a],{i,2},{j,i}]
Out[3]= 4
7
10

في هذه الحلقة يتم حساب التعبير
 $a=i^2+3j$ ثم طباعته لقيم
زوجا المعطاة

وفي برنامج ماتيماتكا يمكن تكرار تطبيق نفس الدالة عدد محدود من المرات على تعبير معين
باستخدام الأمر Nest كالآتي :

Nest[f,expr,n] تطبيق الدالة f على التعبير $expr$
لعدد n من المرات

In[4]:=Nest[f,x,3]
Out[4]= f[f[f[x]]]

لحساب $f(f(f(x)))$

In[5]:=f[x_]=(x+1)^2;Nest[f,x,2]
Out[5]=(1 + (1 + x)^2)^2

تعريف الدالة $f(x) = (x+1)^2$
ثم حساب $f(f(x))$

In[6]:= Nest[f,1,2]
Out[6]= 25

لحساب $f(f(1))$

وفي برنامج ماتيماتكا يمكن بناء الحلقات بحيث يتم إيقاف تنفيذ التكرار إذا لم يتحقق شرط معين وذلك باستخدام الأوامر **For , While** كالآتي :

الوظيفة التي يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
حساب قيمة start والتحقق من الشرط test لتنفيذ body مع تكرار إضافة step	For[start,test,step,body]
يتم تكرار تنفيذ body إذا كان الشرط test متحقق	While[test,body]

In[7]:=For[i=0,i<3,i=i+1,Print[i]]

Out[7]=

0

1

2

حلقة باستخدام **For** حيث يتم البدء

بقيمة **i=0** والتحقق من الشرط **i<3**

لتنفيذ طباعة **i** مع إضافة 1 الى **i**

In[8]:=i=0;While[i<3,Print[i];i=i+1]

Out[8]=

0

1

2

تنفيذ الحلقة السابقة باستخدام **While**

وعند استخدام أوامر الحلقات في ماتيماتكا خاصة مع الأوامر For , While غالباً ما نحتاج الى تكرار تعديل قيم في بعض المتغيرات المستخدمة داخل الحلقة ، وتوجد بعض الطرق المختصرة لأجراء مثل هذه التعديلات في قيم المتغيرات والجدول الآتي يوضح ذلك .

العملية المختصرة	معنى العملية المختصرة
$i++$	زيادة قيمة i بمقدار 1 فيما يستجد مع الاحتفاظ بقيمة i السابقة داخل $i++$
$i--$	نقصان قيمة i بمقدار 1 فيما يستجد مع الاحتفاظ بقيمة i السابقة داخل $i--$
$++i$	زيادة قيمة i بمقدار 1 وجعل i هي القيمة الجديدة أي أن $++i$ تمثل $i+1$
$--i$	نقصان قيمة i بمقدار 1 وجعل i هي القيمة الجديدة أي أن $--i$ تمثل $i-1$
$i+=d$	زيادة قيمة i بمقدار d أي أن $i=i+d$
$i-=d$	نقصان قيمة i بمقدار d أي أن $i=i-d$
$x*=c$	ضرب x في العدد c أي أن $x=x*c$
$x/=c$	قسمة x على العدد c أي أن $x=x/c$
$\{x,y\}=\{y,x\}$	استبدال قيم x, y أي تغيير قيمة x لتصبح y وتغيير قيمة y لتصبح x

In[9]:=i=5;Print[i++];Print[i]

في هذا المثال يتم طباعة قيمة $i++$ وقيمة i

Out[9]=

ونلاحظ أن قيمة $i++$ هي قيمة i قبل الزيادة

5

6

In[10]:=i=5;Print[++i];Print[i]

في هذا المثال يتم طباعة قيمة $++i$ وقيمة i

Out[10]=

ونلاحظ أن قيمة $++i$ هي قيمة i بعد الزيادة

6

6

In[11]:=r=x;r+=3y;r

في هذه المنظومة تم وضع $r=x$ ثم زيادة قيمة r

Out[11]=x + 3 y

بمقدار $3y$ فتصبح قيمة r الجديدة $x+3y$

In[12]:=a=3;b=7;Print[{a,b}];

استبدال قيم a, b

{a,b}={b,a};Print[{a,b}]

Out[12]=

{3, 7}

{7, 3}

In[13]:=x=1;y=2;z=3;Print[{x,y,z}];

استبدال قيم x, y, z

{x,y,z}={z,x,y};Print[{x,y,z}]

Out[13]=

{1, 2, 3}

{3, 1, 2}

In[14]:=For[i=1;t=x,i^2<10,i++,t=t^2+i;Print[t]]

Out[14]=

$$1+x^2$$

$$2+(1+x^2)^2$$

$$3+(2+(1+x^2)^2)^2$$

هذه الحلقة على الصورة **For[start,test,step,body]** حيث

start	i=1 ; t=x
test	i^2<10
step	i++
body	t=t^2+i ; Print[t]

٣ . أوامر الانتقال المشروط Conditionals

عند بناء منظومة الإجراءات Procedure في ماتيماتكا غالبا ما نحتاج الى تنفيذ بعض العمليات إذا تحقق شروط معينة ويتم ذلك في ماتيماتكا باستخدام أوامر الانتقال المشروط الآتية :

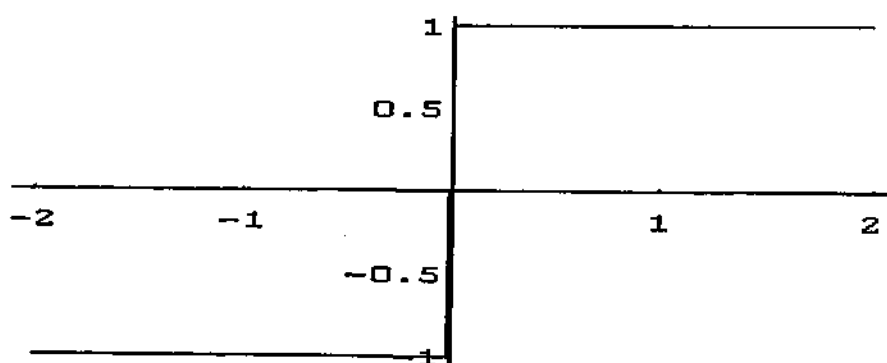
الصيغة العامة للأمر	الوظيفة التي يقوم بها الأمر
If[test,then,else]	يتم تنفيذ then إذا كان test تحقق وخلاف ذلك يتم تنفيذ else
If[test,then,else,unknown]	إذا كان test تحقق يتم تنفيذ then وإذا كان test غير متحقق يتم تنفيذ else وخلاف ذلك يتم تنفيذ unknown
1,value1,test2,value 2, ...]	يتم تنفيذ value المناظرة الى أول اختبار testi يتحقق

```
In[1]:= x=3;y=5;
      If[ x > y , Print[x] , Print[y] ]
Out[1]=
      5
```

إدخال قيم x, y ثم طباعة العدد الأكبر وقد تم استخدام أمر الانتقال المشروط **If** على الصورة **If[test,then,else]** حيث

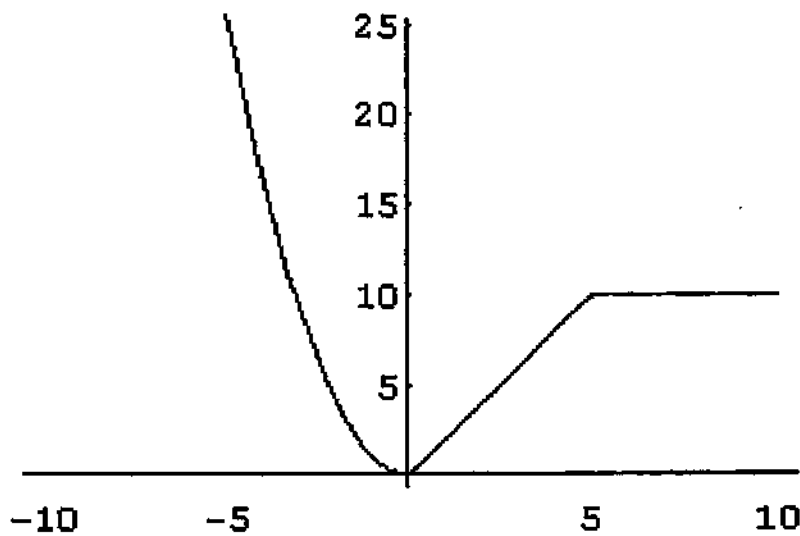
test	$x > y$
then	Print[x]
else	Print[y]

```
In[2]:=f[x_]:=If[x>0,1,-1];
      Plot[f[x],{x,-2,2}]
```



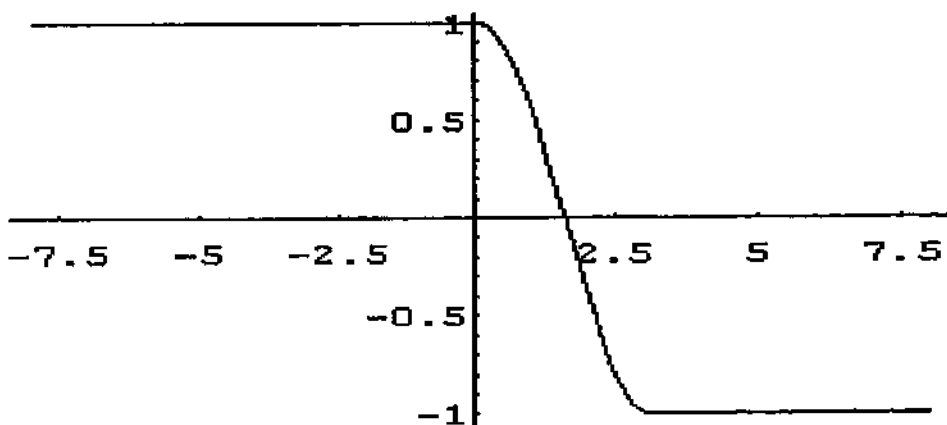
استخدام الأمر **If** في تعريف الدالة $f[x]$ ثم رسم الدالة

```
In[3]:=r1[x_]:=Which[x<0,x^2,x>0 && x<5,2x,True,10];
Plot[r1[x],{x,-10,10}]
```



استخدام الأمر Which في تعريف الدالة r1[x] ثم رسم الدالة

```
In[4]:=r2[x_]:=Which[x<0,1,x<N[Pi],Cos[x],True,-1];
Plot[r2[x],{x,-8,8}]
```



استخدام الأمر Which في تعريف الدالة r2[x] ثم رسم الدالة

منظومة تم فيها تعريف قائمة a من الأعداد الحقيقية ثم حساب وطباعة
العدد الأصغر من القائمة

```
In[5]:=a={5,2,7,55,-4,9,3,10,-24,44,65,-21};mi=a[[1]];
Do[If[mi>a[[i]],mi=a[[i]],++i],{i,1,Length[a]-1}];
Print["Minimum of the list a = ",mi]
```

Out[5]= Minimum of the list a = -24

منظومة تم فيها حساب وطباعة العدد الأكبر من القائمة a

```
In[6]:=ma=a[[1]];
Do[If[ma<a[[i]],ma=a[[i]],++i],{i,1,Length[a]-1}];
Print["Maximum of the list a = ",ma]
```

Out[6]= Maximum of the list a = 65

منظومة تم فيها حساب وطباعة العدد الأصغر والعدد الأكبر من القائمة a

```
In[7]:=mi=a[[1]];ma=a[[1]];
Do[Which[mi>a[[i]],mi=a[[i]],ma<a[[i]],ma=a[[i]]];++i,
{i,2,Length[a]-1}];
Print["Minimum of the list a = ",mi];
Print["Maximum of the list a = ",ma]
```

Out[7]= Minimum of the list a = -24

Maximum of the list a = 65

وباستخدام الدوال الموجودة داخل بناء ماتيماتكا يمكن حساب

Min العدد الأصغر من القائمة مباشرة باستخدام الدالة

Max والعدد الأكبر من القائمة مباشرة باستخدام الدالة

```
In[8]:=Min[a]
```

Out[8]=-24

```
In[9]:=Max[a]
```

Out[9]=65

المراجع

- [1] - Wolfram , Stephen
Mathematica : A System for Doing Mathematics
by Computer ,
Second Edition , Addison Wesley , 1991 .
- [2] - Wolfram , Stephen
Mathematica : The Student Book ,
Addison Wesley , 1994 .
- [3] - Abell , Martha L . and Braselton, Tames P . ,
The Mathematica Handbook
Academic Press , 1992 .
- [4] - Maeder , Roman ,
Programming in Mathematica ,
Addison Wesley , 1992 .

رقم الإيداع : ٥٦١٦ / ٢٠٠٠

هذا الكتاب

برنامج ماثماتيكا هو أحد برامج الكمبيوتر الهامة التي ظهرت حديثاً ، ويحتوى على العديد من الأوامر والدوال التي تغطى معظم الفروع الدقيقة فى الرياضيات .

ويقدم هذا الكتاب شرح تفصيلى لبرنامج ماثماتيكا وكيفية التعامل مع الأوامر والدوال الخاصة به على الكمبيوتر والاستفادة المثلى منه فى حل المشاكل الرياضية المختلفة .

ويقدم الكتاب فى أسلوب مبسط بعيداً عن التعقيد كما يتضمن الجزء العملى الخاص بالتعرف على أوامر برامج ماثماتيكا وتنفيذها على الكمبيوتر ، حيث يعرض العديد من الأمثلة التى تم تنفيذها على الكمبيوتر والتى تخدم مشاكل متعددة فى فروع الرياضيات المختلفة مثل التفاضل والتكامل ، والجبر ، والمعادلات التفاضلية والتحليل العددى ، كما يتضمن الكتاب العديد من التطبيقات للأوامر الخاصة برسم المنحنيات سواء فى المستوى أو الفراغ بالصورة الكرتيزية أو البرمترية ، كذلك حل أنظمة من المعادلات .

وهذا الكتاب موجه لدراسى الرياضيات والمهتمين بالكمبيوتر وتطبيقه فى مجال الرياضيات ، حيث يخدم الدارسين سواء فى المرحلة الثانوية أو الجامعية لطلاب قسم الرياضيات بكلية التربية أو العلوم أو كلية الهندسة .

والله ولى التوفيق ...

الناشر